**UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR** **Abril-Julio 2008**
**DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS PURAS Y APLICADAS**
**MATEMATICA III (MA-1116)**

**PRACTICA 1**

**Contenido**: Matrices. Operaciones con matrices. Sistemas de m ecuaciones con n incógnitas. Operaciones elementales de fila. Matriz escalonada, escalonada reducida. Métodos de Gauss y Gauss-Jordan. Sistemas con una solución, con infinitas soluciones e inconsistente: homogéneos y no homogéneos. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales
.

**Nota**: Además de los ejercicios aquí propuestos los estudiantes deben realizar los ejercicios de las secciones 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 y 1.7 del texto.

**1**. Dadas las matrices:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix},\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \mathrm{C}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix},\quad \mathrm{D}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 3\\ 1 & 5 & 2\end{pmatrix},\quad \mathrm{E}=\begin{pmatrix}i & -i\\ 3 & 4+i\end{pmatrix},\quad \mathrm{F}=\begin{pmatrix}0 & 1+i\\ i & 5\end{pmatrix},$$

donde $i^2=-1$

Calcule: **a**) B + AC **b**) 2E – iF **c**) DC – 2C **d**) $\mathrm{F}^2$ + B

*Solución*:

**a**) $\begin{pmatrix}17 & 9\\ 13 & 3\end{pmatrix}$ **b**) $\begin{pmatrix}2i & 1-3i\\ 7 & 8-3i\end{pmatrix}$ **c**) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -6 & 3\\ 10 & 2\end{pmatrix}$ **d**) $\begin{pmatrix}i & 9+5i\\ 5i & 25+i\end{pmatrix}$

**2**. Dadas las matrices:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2a & 3\\ 5 & 0\end{pmatrix},\qquad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}12 & -1\\ 0 & d\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad \mathrm{C}=\begin{pmatrix}4 & b^2\\ -\frac{1}{c} & 3\end{pmatrix}$$

Donde $a$, *b* y *c* son números reales, con *c* distinto de cero, determine $a$, *b* y *c* tal que:

2A – B = 4C.

*Solución*:

$$a=7,\quad b=\pm\frac{\sqrt{7}}{2},\quad c=-\frac{2}{5}\quad \text{y}\quad d=-12$$

**3**. **a**) Verifique que la matriz $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}a & i\\ i & b\end{pmatrix}$, donde $i^2=-1$, $a=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$, $b=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$, tiene la propiedad $\mathrm{A}^2=\mathrm{A}$.

**b)** Dé un ejemplo de una matriz que no tenga esa propiedad.

**4**. Dada la matriz $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, halle un vector columna $\vec{x}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$, tal que $\mathrm{A}\,\vec{x}=5\vec{x}+\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$.

*Solución*:

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-b \\ a+3b \end{pmatrix}$$

mientras que,

$$5\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+1 \\ 5b+3 \end{pmatrix}$$

luego, $A\vec{x} = 5\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, si y sólo si:

$$\begin{pmatrix} 2a-b \\ a+3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+1 \\ 5b+3 \end{pmatrix},$$

lo cual es cierto si y sólo si:

$$2a - b = 5a + 1 \quad \text{y} \quad a + 3b = 5b + 3$$

es decir, si

$$3a + b = -1 \quad \text{y} \quad a - 2b = 3$$

luego, el problema se reduce a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccc} 3a & + & b & = & -1 \\ a & - & 2b & = & 3 \end{array}$$

cuya solución es $a = \frac{1}{7}$, $b = -\frac{10}{7}$, de donde, $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{10}{7} \end{pmatrix}$.

**5.** Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 4 \\ 6x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 18 \end{array}$$

**a)** Escriba la matriz aumentada del sistema

**b)** Utilice el método de eliminación de Gauss para determinar todas las soluciones, si existen, del sistema dado.

*Solución*:

**a**) La matriz aumentada del sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & -1 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 3 & 18 \end{pmatrix}$

Al aplicar el método de Gauss a la matriz ampliada, se obtiene que ésta es equivalente a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{5} & \frac{24}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el sistema dado es equivalente al sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ & & x_2 & - & \frac{9}{5}x_3 & = & \frac{24}{5} \end{array}$$

el cual tiene infinitas soluciones.

Despejando $x_2$ en la segunda ecuación, se tiene:

$$x_2 = \frac{24+9x_3}{5},$$

sustituyendo el valor de $x_2$ en la primera ecuación, resulta:

$$x_1 = \frac{11-4x_3}{5},$$

si hacemos $x_3 = \lambda$, las soluciones del sistema planteado son:

$$x_1 = \frac{11-4\lambda}{5}, \quad x_2 = \frac{24+9\lambda}{5}, \quad x_3 = \lambda \text{, con } \lambda \in R$$

**6.** Exprese los sistemas de ecuaciones dados de la forma $A\vec{x} = \vec{b}$

**a)** $$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & = & 10 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 9 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -3 \end{array}$$

**b)** $$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 6y & - & 10z & = & 6 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ 3x & - & 7y & + & 11z & = & -4 \end{array}$$

*Solución*:

**a)** $$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

**b)** $$\begin{pmatrix} -2 & 6 & -10 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

**7.** Resuelva los sistemas de ecuaciones del ejercicio anterior.

*Solución*:

**a)** $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

**b)** $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \frac{9}{2} \\ 2\alpha + \frac{5}{2} \\ \alpha \end{pmatrix}$$ con $\alpha \in R$.

**8**. Determine los valores de $a$, si existen, para que el sistema

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & + & (a^2-3)z & = & a \end{array}$$

**a)** Sea inconsistente
**b)** Tenga infinitas soluciones. Halle las soluciones para este caso.
**c)** Tenga solución única. Halle las soluciones para este caso.

*Solución*:

Al aplicar el método de Gauss a la matriz ampliada del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a^2-3 & a \end{pmatrix},$$

se obtiene que esta matriz es equivalente a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{pmatrix}$$

**a)** Si $a^2-4=0$ **y** $a-2\neq 0$ el sistema no tiene solución, luego el sistema es inconsistente si $a=-2$. Note que si $a=-2$ se obtiene $0=-4$, lo cual es una contradicción.

**b)** El sistema tiene infinitas soluciones si $a=2$. Para obtener dichas soluciones, se sustituye el valor de $a$ en la matriz, y se obtiene la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el sistema equivalente, para este caso, es:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & y & & & = & 1 \end{array}$$

cuyas soluciones son:

$$x=1-\lambda,\quad y=1,\quad z=\lambda,\ \text{con}\ \lambda \in R$$

**c)** El sistema tiene solución única si $a\neq 2$ y $a\neq -2$, la matriz reducida es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{a+2} \end{pmatrix},$$

y la solución es:

$$x=\frac{a+1}{a+2}, \quad y=1, \quad z=\frac{1}{a+2}.$$

**9**. Determine los valores de $a$, *b* y *c*, si existen, para que el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 2x & + & 3y & + & 3z & = & b \\ 5x & + & 9y & - & 6z & = & c \end{array}$$

**a)** Sea inconsistente
**b)** Sea consistente

*Solución*:

Al aplicar el método de Gauss a la matriz ampliada del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 2 & 3 & 3 & b \\ 5 & 9 & -6 & c \end{pmatrix}$$

se obtiene que ésta matriz es equivalente a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 1 & -9 & 2a-b \\ 0 & 0 & 0 & c-3a-b \end{pmatrix},$$

luego,

**a)** El sistema es inconsistente si $c-3a-b \neq 0$. ¿Por qué?
**b)** El sistema tiene solución si $c-3a-b=0$. En este caso, el sistema tiene infinitas soluciones. ¿Por qué?

**10**. Estudie las soluciones del sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 5y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & - & y & - & 4z & = & 0 \end{array}$$

*Solución*:

Dado que **el sistema es homogéneo**, **siempre es consistente**, ya que todo sistema homogéneo siempre tiene la solución:

$$x=y=z=0$$

Veamos si tiene soluciones distintas de la trivial. Para ello, apliquemos el método de Gauss a la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

para obtener la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

lo que nos permite concluir, que la única solución del sistema planteado es la trivial. ¿Por qué?

**11**. Halle los valores de $k$, si existen, para que el sistema

$$\begin{array}{llll} x & +y & +z & =5 \\ x & +2y & -z & =-1 \\ x & & +z & =9 \\ 3x & +y & +\left(k^2+3\right)z & =k+29 \end{array}$$

**a**) Sea inconsistente
**b**) Tenga infinitas soluciones
**c**) Tenga solución única.

*Solución*:

Al aplicar el método de Gauss a la matriz ampliada del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & \left(k^2+3\right) & k+29 \end{pmatrix}$$

se obtiene que esta matriz es equivalente a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k^2-4 & k+2 \end{pmatrix}$$

Si $k^2-4=0$ **y** $k+2\neq 0$ el sistema no tiene solución, luego el sistema es inconsistente si $k=2$. ¿Por qué?

Si $k=-2$, se obtiene la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y el sistema tiene solución única. ¿Por qué?

Si $k\neq -2$ y Si $k\neq 2$, se obtiene la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k-2} \end{pmatrix}$$

Y el sistema no tiene solución. ¿Por qué?

Por lo tanto, el sistema tiene solución única para $k=-2$, en cualquier otro caso no tiene solución.

**12**. Sea

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a(1-b) & 1+b \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & a(1+b) \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales. Encuentre los valores de $a$ y b para que el sistema.

**a**) Sea inconsistente
**b**) Tenga infinitas soluciones
**c**) Tenga solución única.

*Solución*:

Al aplicar el método de Gauss a la matriz ampliada del sistema se obtiene que esta matriz A es equivalente a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & a(1+b) \\ 0 & 0 & 0 & a(1-b) & 1+b \end{pmatrix}$$

Si $a(1-b)=0$ **y** $1+b\neq 0$ el sistema no tiene solución. ¿Por qué?.

Sea $a(1-b)=0$

Observe que

$$a(1-b)=0 \Rightarrow a=0 \quad \text{o} \quad b=1$$

Se presentan dos casos:

i) ) Sea $a=0$. En este caso resulta la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+b \end{pmatrix}$$

Si $b \neq -1$ el sistema es inconsistente.
Si $b = -1$ el sistema tiene infinitas soluciones. ¿Por qué?

ii) Sea $b = 1$. En este caso resulta la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En este caso el sistema es inconsistente. ¿Por qué?

Sea $a(1-b) \neq 0$, entonces $a \neq 0$ **y** $b \neq 1$, En este caso resulta la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & a(1+b) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{1+b}{a(1-b)} \end{pmatrix}$$

El sistema tiene solución única.

En consecuencia,

a) El sistema es inconsistente para $a = 0$ **y** $b \neq -1$, ó $b = 1$ **y** cualquier valor de $a$.
b) El sistema tiene infinitas soluciones para $a = 0$ **y** $b = -1$
c) El sistema tiene solución única para $a \neq 0$ **y** $b \neq 1$

**UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR** **Abril-Julio 2008**
**DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS PURAS Y APLICADAS**
**MATEMATICA III (MA-1116)**

**PRACTICA 2**

**Contenido**: Matriz identidad. Matriz invertible. Cálculo de la inversa de una matriz. Matrices equivalente por filas. Matriz transpuesta. Matriz simétrica.

**Nota**: Además de los ejercicios aquí propuestos los estudiantes deben realizar los ejercicios de las secciones 1.8 y 1.9 del texto.

**1.** Determine si las matrices dadas son invertibles; en caso de ser invertible halle su inversa.

**a)** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 19 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

*Solución*:

**a)** La matriz A no es invertible, ya que la forma reducida por renglones de A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene un renglón de ceros.

**b)** La matriz B si es invertible, ya que su forma escalonada reducida por renglones tiene 3 pivotes, y su inversa es la matriz:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

**2.** Si $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ determine $(AB)^{-1}$.

*Solución*:

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 19 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

**3.** Demuestre que si A, B y C son matrices invertibles de nxn, entonces la matriz $D = ABC$ es invertible y halle su inversa.

$(ABC)^{-1} = \quad = ((AB)C)^{-1}$ (La multiplicación de matrices es asociativa)

$= C^{-1}(AB)^{-1}$ (Inversa de un producto de dos matrices invertibles)

$= C^{-1}(B^{-1}A^{-1})$ (Inversa de un producto de dos matrices invertibles)

$= C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ (La multiplicación de matrices es asociativa)

Luego, La matriz $D = ABC$ es invertible, y su inversa $D^{-1}$ es

$$D^{-1} = (ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

**4**. Halle la transpuesta de las matrices dadas:

**a**) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, **b**) $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, **c**) $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

*Solución*:

**a**) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, **b**) $B^t = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, **c**) $C^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

**5**. Una matriz cuadrada A es simétrica si $A^t = A$. Sean A y B dos matrices simétricas de nxn, demuestre que $(AB)^t = BA$.

*Solución*:

Dado que A y B son matrices simétricas se tiene que $A^t = A$ y $B^t = B$. Además, se tiene que $(AB)^t = B^t A^t$. Luego:

$$(AB)^t = B^t A^t = BA$$

**6**. Sea A una matriz de nxn. Demuestre que la matriz $\frac{1}{2}\left(A + A^t\right)$ es simétrica.

*Solución*:

$$\left(\frac{1}{2}\left(A + A^t\right)\right)^t = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right)^t = \frac{1}{2}\left(A^t + \left(A^t\right)^t\right) = \frac{1}{2}\left(A^t + A\right) = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right)$$

Nota: Justifique cada uno de los pasos de la demostración anterior.

**7**. Una matriz cuadrada A es antisimétrica si $A^t = -A$. Demuestre que la matriz $\frac{1}{2}\left(A - A^t\right)$ es antisimétrica.

*Solución*:

$$\left(\frac{1}{2}\left(A - A^t\right)\right)^t = \frac{1}{2}\left(A - A^t\right)^t = \frac{1}{2}\left(A^t - \left(A^t\right)^t\right) = \frac{1}{2}\left(A^t - A\right) - \frac{1}{2}\left(A - A^t\right)$$

Nota: Justifique cada uno de los pasos de la demostración anterior.

**8**. Sea $A = \left(a_{ij}\right)$ una matriz cuadrada antisimétrica de nxn. Demuestre que toda componente de la diagonal principal es cero.

*Solución*:

Sabemos que $A^t = (a_{ji})$. Si $A^t = -A$, se tiene que, $a_{ji} = -a_{ij}$ para todo *i*, *j* variando de 1 a n. En particular, para los elementos de la diagonal principal, se cumple que $a_{ii} = -a_{ii}$, para todo $i = 1, 2, \cdots, n$. Por lo tanto, $a_{ii} = 0$ , para todo $i = 1, 2, \cdots, n$.

**9.** Sean A y B dos matrices cuadradas de nxn. Pruebe que la matriz $AB^t + BA^t$ es simétrica.

*Solución*:

$$(AB^t + BA^t)^t = (AB^t)^t + (BA^t)^t = (B^t)^t A^t + (A^t)^t B^t = BA^t + AB^t = AB^t + BA^t$$

Nota: Justifique cada uno de los pasos de la demostración anterior.

**10.** Sea A una matriz cuadrada

**a)** Muestre que $(A^2)^t = (A^t)^2$.

**b)** ¿Es cierto o falso que $(A^t)^k = (A^k)^t$, para todo entero positivo k?

*Solución*: Sugerencia: use el problema 5

**11.** Una matriz cuadrada se llama ortogonal si $AA^t = I$. Compruebe que la matriz

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

es ortogonal para todo número real $\theta$.

**12.** Sean A y B dos matrices ortogonales de nxn. Diga si la matriz D =AB es ortogonal.

*Solución*:

Observe que para determinar si la matriz D es ortogonal, debemos estudiar el producto $(AB)(AB)^t$. Teniendo en cuenta que por hipótesis se tiene que: $AA^t = I$ y $BB^t = I$, se tiene entonces que:

$$(AB)(AB)^t = (AB)(B^t A^t) \;\; A(BB^t)A^t = A(I)A^t = = AA^t = I$$

Luego, la matriz D = AB sí es ortogonal.

Nota: Justifique cada uno de los pasos de la demostración anterior.

**13.** Sean A y B dos matrices cuadradas de nxn. Pruebe que

$$(ABA^{-1} + C^t)^t = (A^t)^{-1} B^t A^t + C$$

*Solución*:

$$(ABA^{-1} + C^t)^t = (ABA^{-1})^t + (C^t)^t = (A^{-1})^t B^t A^t + C = (A^t)^{-1} B^t A^t + C$$

Nota: Justifique cada uno de los pasos de la demostración anterior.

**14.** Sea A una matriz cuadrada invertible de nxn. Demuestre que si B es una matriz cuadrada de nxn tal que $AB = 0$ entonces B es la matriz nula.

*Solución*:

$$AB = 0 \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}0 \Rightarrow (A^{-1}A)B = 0 \Rightarrow IB = 0 \Rightarrow B = 0$$

Nota: Justifique cada uno de los pasos de la demostración anterior.

**15**. ¿Será cierto $AB = 0 \Rightarrow B = 0$ para cualquier par de matrices cuadradas A y B?

*Solución*:

No, trate de hallar un contraejemplo.

**16**. ¿Son los ejercicios 14) y 15) contradictorios?. Justifique su respuesta.

**UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR** **Abril-Julio 2008**
**DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS PURAS Y APLICADAS**
**MATEMATICA III (MA-1116)**

**CORRECCIÓN DE LA PRACTICA 1**

**Nota**:

Al final del ejercicio del ejercicio 11) de la práctica 1, <u>debe</u> decir:

Si $k \neq -2$ y si $k \neq 2$ , se obtiene la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k-2} \end{pmatrix}$$

Y el sistema sólo tiene solución para $k = 3$ . ¿Por qué?

Por lo tanto, el sistema tiene solución única para $k = -2$ ó $k = 3$ , en cualquier otro caso no tiene solución.

**UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR** **Abril-Julio 2008**
**DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS PURAS Y APLICADAS**
**MATEMATICA III (MA-1116)**

**PRACTICA 3**

**Contenido**: Determinantes. Propiedades de determinantes. Determinante de $A^{-1}$. Adjunta de una matriz. Cálculo de la inversa usando la adjunta.

**Nota**: Además de los ejercicios aquí propuestos los estudiantes deben realizar los ejercicios de las secciones 2.1, 2.2 y 2.4 del texto.

**1.** Calcule los siguientes determinantes:

**a)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

**d)** $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & d & a \end{vmatrix}$, con $a,b,c,d \in R$ **e)** $\begin{vmatrix} 1 & -i \\ 5-i & 1-i \end{vmatrix}$, donde $i^2 = -1$

*Solución*:

**a)** 10 **b)** 54 **c)** 30 **d)** $a^3$ **e)** $2+4i$

**2.** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \\ 8 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

**a)** Calcule el menor $M_{31}$ de la matriz A.
**b)** Halle el valor del determinante $|M_{31}|$
**c)** Determine el cofactor $A_{31}$
**d)** ¿Cuál es el elemento $a_{13}$ de la matriz Adj(A)

*Solución*:

**a)** $M_{31} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $|M_{31}| = 43$ **c)** $A_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = 43$ **d)** $a_{13} = 43$

**3.** Determine, sin efectuar cálculos, ¿cuáles de los siguientes determinantes son nulos? Justifique su respuesta.

**a)** $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 15 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ **b)** $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ **c)** $|C| = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$

*Solución*:

**a)** $|A| = 0$, ya que la segunda fila es múltiplo de la primera fila.

**b)** $|B| \neq 0$, ya que la matriz B es una matriz diagonal y ningún elemento de la diagonal es igual a cero.

**c)** $|C| = 0$, ya que la tercera columna es múltiplo de la primera columna.

**4.** Si $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -4$, calcule los determinantes de las matrices siguientes:

$$B = \begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+4c_1 & b_2+4c_2 & b_3+4c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

*Solución*:

| | |
|---|---|
| $\lvert B\rvert = -\lvert A\rvert = 4$ | La matriz B se obtiene intercambiando dos columnas distintas de A |
| $\lvert C\rvert = 3\times 2\times \lvert A\rvert = -24$ | La matriz C se obtiene multiplicando la segunda fila de A por 3 y la tercera fila por 2 |
| $\lvert D\rvert = \lvert A\rvert = -4$ | Para obtener la matriz D se sumó a la segunda fila de A la tercera fila multiplicada por 4. |

**5.** Muestre que

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(b-c)$$

*Solución*:

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2-a^2 & b-a & 0 \\ c^2-a^2 & c-a & 0 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b+a & 1 & 0 \\ c+a & 1 & 0 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} b+a & 1 \\ c+a & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= (b-a)(c-a)(b-c)$$

Nota: Justifique cada uno de los pasos de la demostración anterior.

**6**. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**a**) Halle Adj(A) **b**) ¿Es la matriz A invertible? ,

**c**) En caso de ser invertible determine su inversa a partir de la adjunta de A y usando Gauss Jordan. Compare los resultados obtenidos.

*Solución*:

**a**) $Ajd(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ **b**) $\det(A) = -2 \neq 0$ , en consecuencia, la matriz A si es invertible.

**c**) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**7**. ¿Para qué valores de k, si existen, la matriz $A = \begin{pmatrix} k & -3 \\ 4 & 1-k \end{pmatrix}$ es invertible?

*Solución*:

$$|\, A \,| = (4-k)(k+3)$$

Por lo tanto, A es invertible si y sólo si $k \neq 4$ y $k \neq -3$ . ¿Por qué?

**8**. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

- **a)** Calcule $\det(A - \lambda \mathrm{I})$
- **b)** ¿Para cuáles valores de $\lambda$, si existe, la matriz $D = A - \lambda \mathrm{I}$ es invertible?

*Solución*:

**a**) $|\, A - \lambda \mathrm{I} \,| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)$

**b**) D es invertible si y sólo si $\lambda \neq 1, \quad \lambda \neq 2, \quad \lambda \neq 3$ ¿por qué?

**9.** Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- **a)** Calcule $\det(B - \lambda I)$
- **b)** Halle todos los valores reales o complejos de $\lambda$, si existe, para los cuales $|B - \lambda I| = 0$

*Solución*:

**a)** $|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = \lambda^2 + 1$

**b)** $|B - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = i \quad \text{ó} \quad \lambda = -i$

**10.** Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n.

- **a)** ¿Es siempre cierto que $AB = BA$?
- **b)** Es cierto que $\det(AB) = \det(BA)$?
- **c)** Existe alguna contradicción entre los resultados obtenidos en a) y b)?

*Solución*:

- **a)** Falso ¿Por qué?
- **b)** Cierto ¿Por qué?
- **c)** No existe ¿por qué?

**11.** Sea A una matriz cuadrada tal que $|A| = -4$, calcule:

**a)** $|A^3|$ **b)** $|A^t|$ **c)** $|A^{-1}|$

*Solución*:

**a)** $|A^3| = |A \cdot A \cdot A| = |A||A||A| = -64$

**b)** $|A^t| = |A| = -4$

**c)** $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = -\dfrac{1}{4}$

Nota: Justifique cada uno de los pasos de la demostración anterior.

**12**. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n. Demuestre que si $\det(AB)=0$ entonces $\det(A)=0$ o $\det(B)=0$

*Solución*:

$$\det(AB)=0 \Rightarrow \det(A)\det(B)=0 \Rightarrow \det(A)=0 \quad \text{o} \quad \det(B)=0$$

Nota: Justifique cada uno de los pasos de la demostración anterior.

**13**. ¿El resultado obtenido en la pregunta anterior contradice el resultado de la pregunta 15) de la práctica 2?

*Solución*:

No, ¿por qué?

**14**. Sea A una matriz cuadrada de orden n. Demuestre que si $A=A^{-1}$ entonces $|A|^2=1$, por lo tanto, $|A|=1$ ó $|A|=-1$.

*Solución*:

$$A\cdot A^{-1}=\mathrm{I} \Rightarrow \det\left(A\cdot A^{-1}\right)=1$$

Como $A=A^{-1}$

$$\det(A\cdot A)=\det\left(A\cdot A^{-1}\right)=1 \Rightarrow \det\left(\mathrm{A}^2\right)=1 \Rightarrow \det(A)\det(A)=1 \Rightarrow [\det(A)]^2=1$$

**15**. Sean A, B y C matrices cuadradas de 4x4 con $\det(A)=\dfrac{1}{4}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

**a**) Calcule $|B|$

**b**) Si $C^{-1}\left(C^{-1}BA\right)^t=I_4$, calcule $|C|$

*Solución*:

**a**) $|B|=16$

**b**) $C^{-1}\left(C^{-1}BA\right)^t=I_4 \Rightarrow \det\left(C^{-1}\left(C^{-1}BA\right)^t\right)=1 \Rightarrow \det\left(C^{-1}\right)\det\left(\left(C^{-1}BA\right)^t\right)=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \det\left(C^{-1}\right)\det\left(C^{-1}BA\right)=1 \Rightarrow \det\left(C^{-1}\right)\det\left(C^{-1}\right)\det(B)\det(A)=1$$

$$\Rightarrow \det\left(C^{-1}\right)\det\left(C^{-1}\right)\det(B)\det(A)=1 \Rightarrow \frac{1}{\det(C)}\frac{1}{\det(C)}\cdot 16\cdot\frac{1}{4}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\det(C)]^2=4 \Rightarrow \det(C)=2 \quad \text{ó} \quad \det(C)=-2$$

Nota: Justifique cada uno de los pasos de la demostración anterior.

**16**. Use las propiedades de los determinantes para demostrar que:

$$\begin{vmatrix} 1+a & b & c & d \\ a & 1+b & c & d \\ a & b & 1+c & d \\ a & b & c & 1+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a+b+c+d & b & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+a+b+c+d$$

Nota: Justifique cada uno de los pasos de la demostración anterior.

**17**. Sea A una matriz cuadrada 2x2 tal que $A\,A^t = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, calcule $\left| A^{-1} \right|$.

*Solución*:

$$A\,A^t = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A\,A^t\right) = 36 \Rightarrow \det(A)\det\left(A^t\right) = 36 \Rightarrow [\det(A)]^2 = 36 \Rightarrow \det(A) = \pm 6$$

Como $\left| A^{-1} \right| = \dfrac{1}{|A|}$, se tiene que

$$\left| A^{-1} \right| = \frac{1}{6} \quad \text{ó} \quad \left| A^{-1} \right| = -\frac{1}{6}$$

Nota: Justifique cada uno de los pasos de la demostración anterior.

**UNIVERSIDAD SIMÓN BOLIVAR** **Abril-Julio 2008**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS**
**MATEMÁTICA III (MA-1116)**

**PRACTICA 4**

**Contenido**: Vectores en el plano y en el espacio. Producto escalar y proyecciones. Producto vectorial. Rectas y planos en el espacio.

**Nota**: Además de los ejercicios aquí propuestos los estudiantes deben realizar los ejercicios de las secciones 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5 del texto.

**1.** Dado los vectores: $\vec{u}=(-4,4)$, $\vec{v}=\left(11,\frac{1}{2}\right)$ y $\vec{w}=(-3,0)$, halle:

**a)** $\frac{1}{2}\vec{u}-2\vec{w}$ **b)** $\left|\vec{u}\right|\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$ **c)** $\vec{u}\cdot\vec{v}-\frac{1}{4}\vec{u}\cdot\vec{w}$ **d)** $\text{proy}_{\vec{u}}\,\vec{v}$

*Solución*:

**a)** $(4,2)$ **b)** $\left(28\sqrt{2},18\sqrt{2}\right)$ **c)** $-45$ **d)** $\left(\frac{21}{4},-\frac{21}{4}\right)$

**2.** Describa todos los vectores $\vec{u}=(x,y)$ de $R^2$ que son ortogonales al vector $(3,-1)$.

*Solución*:

El vector $\vec{u}$ debe satisfacer $(x,y)\cdot(3,-1)=0$.

$$(x,y)\cdot(3,-1)=0 \Rightarrow 3x-y=0 \Rightarrow y=3x$$

Luego, cualquier vector $\vec{u}$ de $R^2$ ortogonal al vector $(3,-1)$ tiene la forma $\vec{u}=(x,3x)=x(1,3)$ con $x\in R$.

**3.** Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores en $R^3$ y c un número real. Demuestre que $\text{proy}_{\vec{v}}\,c\vec{u}=c\,\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}$. Verifique este resultado con $\vec{u}=(2,1,-1)$, $\vec{v}=(3,5,1)$ y $c=2$

*Solución*:

$$\text{proy}_{\vec{v}}\,c\vec{u}=\frac{\left(c\,\vec{u}\right)\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|^2}\vec{v}=\frac{c\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)}{\left\|\vec{v}\right\|^2}\vec{v}=c\,\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|^2}\vec{v}=c\,\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}$$

$$c\vec{u}=(4,2,-2)$$

$$\text{proy}_{\vec{v}}\, c\vec{u} = \frac{(4,2,-2)\cdot(3,5,1)}{9+25+1}(3,5,1) = \frac{20}{35}(3,5,1) = \frac{4}{7}(3,5,1)$$

$$2\,\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = 2\cdot\frac{(2,1,-1)\cdot(3,5,1)}{9+25+1}(3,5,1) = 2\cdot\frac{10}{35}(3,5,1) = \frac{20}{35}(3,5,1) = \frac{4}{7}(3,5,1)$$

**4**. Calcule el área del paralelogramo generado por los vectores $\vec{u} = (3,2,5)$ y $\vec{v} = (1,2,7)$.

*Solución*:

$$A = \left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 16\vec{j} + 4\vec{k}$$

Por lo tanto,

$$A = \left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\| = \sqrt{16+(16)^2+16} = \sqrt{16(1+16+1)} = 4\sqrt{18} = 12\sqrt{2}$$

**5**. Demuestre que $\left(\vec{u}-\vec{w}\right)\cdot\left(2\vec{u}+4\vec{w}\right) = 2\left\|\vec{u}\right\|^2 - 4\left\|\vec{w}\right\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{w}$

*Solución*:

$$\left(\vec{u}-\vec{w}\right)\cdot\left(2\vec{u}+4\vec{w}\right) = 2\vec{u}\cdot\vec{u} + 4\vec{u}\cdot\vec{w} - 2\vec{w}\cdot\vec{u} - 4\vec{w}\cdot\vec{w} = 2\left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{w} - 4\left\|\vec{w}\right\|^2$$

Nota: Justifique cada uno de los pasos de la demostración anterior.

**6**. Halle un vector de módulo 2 perpendicular a los vectores $\vec{a} = (0,1,2)$ y $\vec{b} = (1,4,-2)$

*Solución*:

Sea $\vec{c}$ el vector buscado. Entonces $\vec{c}$ tiene la dirección de $\vec{a}\,x\,\vec{b}$. ¿Por qué?

$$\vec{a}\,x\,\vec{b} = (-10,2,-1)$$

La magnitud de $\vec{a}\,x\,\vec{b}$ es:

$$\left\|\vec{a}\,x\,\vec{b}\right\| = \sqrt{105}$$

Por lo tanto:

$$\vec{c} = \frac{2}{\sqrt{105}}(-10,2,-1)$$

**7**. Demuestre que si los vectores $2\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-3\vec{v}$ son colineales, entonces los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son colineales.

*Solución*:

Como $2\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-3\vec{v}$ son colineales se tiene que:

$$\left(2\vec{u}+\vec{v}\right)x\left(\vec{u}-3\vec{v}\right)=\vec{0}$$

$$\left(2\vec{u}+\vec{v}\right)x\left(\vec{u}-3\vec{v}\right)=2\vec{u}\,x\,\vec{u}-6\,\vec{u}\,x\,\vec{v}+\vec{v}\,x\,\vec{u}-3\,\vec{v}\,x\,\vec{v}=\;7\,\vec{v}\,x\,\vec{u}$$

Luego,

$$7\,\vec{v}\,x\,\vec{u}=\vec{0}\Rightarrow\vec{v}\times\vec{u}=\vec{0}$$

Por lo tanto, vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son colineales

Nota: Justifique cada uno de los pasos de la demostración anterior.

**8**. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de $R^3$ que forman entre sí un ángulo de $\frac{3\pi}{4}$. Demuestre que $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\left\|\vec{u}\,x\,\vec{v}\right\|$.

*Solución*:

$$\left\|\vec{u}\,x\,\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|$$

y

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|$$

Por lo tanto,

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=-\left\|\vec{u}\,x\,\vec{v}\right\|$$

Nota: Justifique cada uno de los pasos de la demostración anterior.

**9**. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores ortogonales $R^3$ con normas 3 y $\frac{2}{9}$ respectivamente. Calcule $\left\|\left(2\vec{u}+\vec{v}\right)\,x\,\left(\vec{u}-4\vec{v}\right)\right\|$.

*Solución*:

$$\left(2\vec{u}+\vec{v}\right)\,x\left(\vec{u}-4\vec{v}\right)=\;2\,\vec{u}\,x\,\vec{u}-8\,\vec{u}\,x\,\vec{v}+\vec{v}\,x\,\vec{u}-4\,\vec{v}\;\;x\;\;\vec{v}=\;8\,\vec{v}\,x\,\vec{u}+\vec{v}\,x\,\vec{u}=9\,\vec{v}\,x\,\vec{u}$$

Luego:

$$\left\|\left(2\vec{u}+\vec{v}\right)\,x\,\left(\vec{u}-4\vec{v}\right)\right\|=9\left\|\vec{v}\,x\,\vec{u}\right\|=9\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=9\cdot3\cdot\frac{2}{9}\cdot1=6$$

Nota: Justifique cada uno de los pasos de la demostración anterior.

**10.** Demuestre que la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(0,1,1)$ y $(1,-1,6)$ es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(-4,2,1)$ y $(-1,6,2)$.

*Solución*:

El vector director de la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(0,1,1)$ y $(1,-1,6)$ es $\overrightarrow{v_1}=(1,-2,5)$.

El vector director de la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(-4,2,1)$ y $(-1,6,2)$ es $\overrightarrow{v_2}=(3,4,1)$.

$$\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}=3-8+5=0$$

En consecuencia las rectas son ortogonales.

**11**. Grafique el lugar geométrico de todos los puntos que satisfacen la ecuación $x=3$.

**a**) En la recta  **b**) En el plano  **c**) En el espacio.

**12**. Halle las ecuaciones simétricas de la recta L que contiene el punto $P(-3,2,-2)$ y es paralela a la recta $\mathrm{L}_1$ de ecuación: $\dfrac{x+1}{3}=2-y=z$.

*Solución*:

Dado que L y $\mathrm{L}_1$ son paralelas, ambas tienen el mismo vector director $\vec{v}=\langle 3,-1,1\rangle$.

Luego, el problema se reduce a hallar las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por el punto dado que tiene la dirección del vector $\vec{v}$. Por tanto, las ecuaciones simétricas de la recta L son:

$$\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=z+2$$

**13**. Halle las ecuaciones simétricas y paramétricas de la recta L que contiene el punto $P(0,1,3)$ y es perpendicular a las rectas de ecuaciones $\mathrm{L}_1:\ x=y=z-2$ y $\mathrm{L}_2:\ x-1=\dfrac{y}{2}=z$

*Solución*:

Nota que, el vector director $\vec{v}$ de la recta L debe ser ortogonal a los vectores directores $\overrightarrow{v_1}=\langle 1,1,1\rangle$ y $\vec{v}_2=\langle 1,2,1\rangle$ de las rectas $\mathrm{L}_1$ y $\mathrm{L}_2$ respectivamente.

Luego:

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \langle -1, 0, 1 \rangle \qquad \text{¿Por qué?}$$

Por tanto, las ecuaciones simétricas de la recta L son:

$$\frac{x}{-1} = z - 3, \quad y = 1 \qquad \text{o} \qquad -x = z - 3, \quad y = 1$$

y las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 \;, \quad \lambda \in \mathrm{R} \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$

**14.** Halle la ecuación de la recta *l* de intersección de los planos de ecuaciones $x + y + z = 1$ y $x + z = 0$.

*Solución*:

Al resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$

o

Se obtiene que el sistema tiene infinitas soluciones: $y = 1, \quad x = -z$

Las ecuaciones paramétricas de la recta *l* son:

$$l : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = -t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathrm{IR}$$

**15.** Halle la ecuación del plano que pasa por el punto de coordenadas $(-1, 2, 1)$ y contiene a la recta *l* de intersección de los planos de ecuaciones $x + y - z = 2$ y $2x - y + 3z = 1$

*Solución*:

Al resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases}$

Se obtiene que el sistema tiene infinitas soluciones: $x = \frac{1}{3}(3 - 2z) \quad , y = \frac{1}{3}(3 + 5z)$

Las ecuaciones paramétricas de la recta *l* son:

$$l : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 5t \\ z = 3t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathrm{IR}$$

El problema ahora se reduce a hallar la ecuación del plano que pasa por el punto de coordenadas $(-1, 2, 1)$ y contiene a la recta *l* de ecuación $l:\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 1+5t \\ z = 3t \end{cases}$ con $t \in \mathrm{IR}$

Para calcular al menos un punto de la recta, basta darle un valor a *t*, por ejemplo $t = 0$, de manera que, un punto de la recta es: $(1, 1, 0)$

El vector director de la recta *l* es $\vec{v} = (-2, 5, 3)$.

El vector director de la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(-1, 2, 1)$ y $(1, 1, 0)$ es $\vec{u} = (2, -1, -1)$.

El vector normal del plano es $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{u}$

$$\vec{n} = (-2, 5, 3) \times (2, -1, -1) = (-2, 4, -8)$$

O también: $(-1, 2, -4)$ (¿por qué?)

La ecuación del plano es

$$(x+1, y-2, z-1) \cdot (-1, 2, -4) = 0$$

$$-x + 2y - 4z = 1$$

**16**. Halle los puntos de intersección del plano obtenido en el ejercicio anterior con los ejes de coordenadas.

*Solución*:

Intersección con el eje x: punto de coordenadas $(-1, 0, 0)$

Intersección con el eje y: punto de coordenadas $\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$

Intersección con el eje z: punto de coordenadas $\left(0, 0, -\frac{1}{4}\right)$

**17**. Halle la intersección del plano obtenido en el ejercicio 15) con los planos coordenados.

*Solución*:

Intersección con el plano XY: recta de ecuación: $-x + 2y = 1, \quad z = 0$
Intersección con el plano XZ: recta de ecuación: $x + 4z = -1, \quad y = 0$
Intersección con el plano YZ: recta de ecuación: $2y - 4z = 1, \quad x = 0$

**18**. Halle la ecuación del plano $\pi$ que contiene al punto $Q(3,1,2)$ y es ortogonal a los planos de ecuaciones $\pi_1 : 2x - y + z = 3$ y $\pi_2 : x + y - z = 7$

*Solución*:

En este caso, el vector normal $\vec{n}$ del plano $\pi$ debe ser ortogonal a los vectores normales $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$ de los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ respectivamente. Para hallar $\vec{n}$ basta tomar $\vec{n} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$. (¿por qué?).

Luego, $\vec{n} = \langle 0,3,3 \rangle$. Observe que, también se puede considerar al vector $\langle 0,1,1 \rangle$ como el vector normal del plano (¿por qué?). Por lo tanto, la ecuación del plano buscado es:

$$\pi : y + z = 3 .$$

**19**. Determine la ecuación del plano que contiene las rectas de ecuaciones:

$$L_1 : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + 3t \quad , t \in R \\ z = -7 + 5t \end{cases} \quad ; \qquad L_2 : \begin{cases} x = 2 - 4s \\ y = 4 + 6s \quad , s \in R \\ z = 10s \end{cases}$$

*Solución*:

Observe que $L_1 \cap L_2 = \varnothing$ y $L_1 \,||\, L_2$. Demuéstrelo.

En este caso, no se puede obtener el vector normal $\vec{n}$ a partir de $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$, donde $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ son los vectores directores de las rectas $L_1$ y $L_2$ respectivamente, a pesar de ser ortogonal a ambos. (¿por qué?).

Para hallar $\vec{n}$, se puede considerar los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y el vector $\overrightarrow{PQ}$ con $P \in L_1$ y $Q \in L_2$. Sean P y Q los puntos de coordenadas $(3,4,-7)$ y $(2,4,0)$ respectivamente. (¿Cómo se obtienen?). Por lo tanto, $\overrightarrow{PQ} = \langle -1,0,7 \rangle$. Sea $\vec{n} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{PQ} = \langle 21,9,3 \rangle$. También se puede considerar como vector normal del plano al vector $7\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ , (¿por qué?).

Por lo tanto, la ecuación del plano buscado es:

$$7x + 3y + z = 26 .$$

**20**. Halle la distancia d del punto $Q(4,-3,1)$ al plano $x + 2y - z - 3 = 0$

*Solución*:

Note que el punto Q no pertenece al plano (¿por qué?).

Sea L la recta que pasa por Q y es perpendicular al plano. Dado que L es perpendicular al plano, dicha recta tiene por vector director el vector $\vec{n}$ normal del plano. Se tiene entonces que las ecuaciones paramétricas de L son:

$$\mathrm{L}:\begin{cases} x = 4 + s \\ y = -3 + 2s \quad , s \in \mathrm{R} \\ z = 1 - s \end{cases}$$

Como L interseca al plano, digamos que en un punto P$(x_0, y_0, z_0)$, se tiene que P pertenece a la recta L, luego, existe un número real *s* tal que

$$\begin{cases} x_0 = 4 + s \\ y_0 = -3 + 2s \\ z_0 = 1 - s \end{cases}$$

y dado que P también pertenece al plano, se cumple que:

$$x_0 + 2y_0 - z_0 - 3 = 0 \,,$$

o también,

$$(4 + s) + 2(-3 + 2s) - (1 - s) - 3 = 0$$

al resolver la ecuación anterior, se tiene $s = 1$, luego, el punto P tiene coordenadas $(5, -1, 0)$.

Por definición de distancia, resulta que la distancia del punto Q al plano es igual a la longitud del segmento $\overline{\mathrm{PQ}}$. Al aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos del espacio, se obtiene que

$$\mathrm{d} = \overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(5-4)^2 + (-1+3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{6}$$

**UNIVERSIDAD SIMÓN BOLIVAR** **Abril-Julio 2008**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS**
**MATEMÁTICA III (MA-1116)**

**PRACTICA 5**

**Contenido**: Espacios vectoriales complejos y reales. Subespacios vectoriales.

**Nota**: Además de los ejercicios aquí propuestos los estudiantes deben realizar los ejercicios de las secciones 4.2 y 4.3 del texto.

**1.** Sea V un espacio vectorial. Demuestre que

**i**) $\alpha \vec{0} = \vec{0}$, para todo $\alpha \in R$

**ii**) $0\vec{x} = \vec{0}$, para todo $\vec{x} \in V$

**2.** Sea V un espacio vectorial y sea $\vec{0}$ el elemento neutro de V para la adición. Demuestre que todo subespacio W de V contiene al $\vec{0}$.

*Solución*:

Como W es un subespacio de V se tiene que $W \neq \Phi$, luego existe $\vec{y} \in W$. Además se tiene que para todo número real k, $k\vec{y} \in W$, en particular, $0\vec{y} \in W$. Por el ejercicio anterior, $0\vec{y} = \vec{0}$. Por lo tanto $\vec{0} = 0\vec{y} \in W$.

**3.** Diga si el conjunto dado es un espacio vectorial. Justifique su respuesta.

**a)** El conjunto de todas las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ con la adición de matrices y la multiplicación por un escalar usual.

**b)** El conjunto de todas las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & 5 \\ c & b \end{pmatrix}$ con la adición de matrices y la multiplicación por un escalar usual.

**c)** El conjunto de todas las funciones continuas en $[0,1]$ ( $C[0,1]$ ) con la adición de funciones y multiplicación por un escalar usual.

**d)** El conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual que tres, de la forma $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + 4$, con la adición y multiplicación por un escalar usual.

**e)** El conjunto de todos los vectores de $R^2$ con la suma definida por $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 3, y_1 + y_2 + 3)$, para todo $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R^2$, y la multiplicación por un escalar usual.

**f)** El conjunto de todos los vectores de $C^3$ con la suma y la multiplicación por un escalar usual.

*Solución*:

**a**) Si, **b**) No, **c**) Si, **d**) No, **e**) No **f**) Si

Nota: En los casos a) y c) debe verificar que se cumplen todos los axiomas de espacio vectorial. En los casos b), d) y e) debe mostrar que no se cumple alguno de los axiomas.

**4**. En cada caso, determine si el conjunto H dado es un subespacio del espacio vectorial V.

**a**) $V = C[0,1]$, con la adición y multiplicación por un escalar usual. $H = \left\{ f \in C[0,1] : \int_0^1 f(x)\,dx = 1 \right\}$.

**b**) $V = M_{3x3}$, con la adición y multiplicación por un escalar usual. $H = \left\{ A \in M_{3x3} : A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \right\}$

**c**) $V = R^3$ **,** con la adición y multiplicación por un escalar usual. $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : x + y + z = 0 \right\}$

**d**) $V = R^3$, con la adición y multiplicación por un escalar usual. $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : x + y + z = 1 \right\}$

**e**) $V = P_3$, con la adición y multiplicación por un escalar usual. $H = \left\{ p(x) \in P_3 : p(x) = ax^3 + bx^2 + x \right\}$

**f**) $V = P_3$, con la adición y multiplicación por un escalar usual. $H = \left\{ p(x) \in P_3 : p(x) = ax^3 + bx^2 + cx \right\}$

**g**) $V = C^3$, con la adición y multiplicación por un escalar usual. $H = \left\{ \begin{pmatrix} a + bi \\ 0 \\ c + di \end{pmatrix} \in C^3 \right\}$

*Solución*:

**a**) Sea $f, g \in H$. Entonces $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ y $\int_0^1 g(x)\,dx = 1$

Veamos si $(f + g) \in H$

$$\int_0^1 \left( f(x) + g(x) \right) dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx = 1 + 1 = 2 \neq 1$$

Por lo tanto,

$$(f + g) \notin H$$

En consecuencia H no es un subespacio de V.

**b**) i) $\mathrm{O} \in \mathrm{H}$, por lo tanto $H \neq \Phi$

Sean $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & d_1 & e_1 \\ 0 & 0 & f_1 \end{pmatrix} \in H$ , $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & f_2 \end{pmatrix} \in H$ y $\alpha \in R$

ii) veamos si $A_1 + A_2 \in H$

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & d_1 & e_1 \\ 0 & 0 & f_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \\ 0 & d_1 + d_2 & e_1 + e_2 \\ 0 & 0 & f_1 + f_2 \end{pmatrix}$$

En consecuencia

$$A_1 + A_2 \in H$$

iii) Veamos si $\alpha A_1 \in H$

$$\alpha A_1 = \alpha \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & d_1 & e_1 \\ 0 & 0 & f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 & \alpha c_1 \\ 0 & \alpha d_1 & \alpha e_1 \\ 0 & 0 & \alpha f_1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\alpha A_1 \in H$$

De i), ii) y iii) se concluye que H es un subespacio de V.

**c**) i) $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{H}$, por lo tanto $H \neq \Phi$

Sean $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in H$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in H$ y $\alpha \in R$

Por lo tanto,

$$x_1 + y_1 + z_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 + y_2 + z_2 = 0$$

ii) Veamos si $\vec{u} + \vec{v} \in H$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) = 0 + 0 = 0$$

En consecuencia $\vec{u} + \vec{v} \in H$

iii) Veamos si $\alpha \vec{u} \in H$

$$\alpha \vec{u} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \\ \alpha z_1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1 = \alpha \left( x_1 + y_1 + z_1 \right) = \alpha \cdot 0 = 0$$

Por lo tanto

$$\alpha \vec{u} \in H$$

De i), ii) y iii) se concluye que H es un subespacio de V.

**d**) H no es un subespacio de V, ya que $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{H}$ , puesto que $0+0+0=0 \neq 1$

**e**) Sean $p(x) = a_1 x^3 + b_1 x^2 + x \in H$ y $q(x) = a_2 x^3 + b_2 x^2 + x \in H$

Veamos si $p(x) + q(x) \in H$

.

$$p(x) + q(x) = \left( a_1 x^3 + b_1 x^2 + x \right) + \left( a_2 x^3 + b_2 x^2 + x \right) = \left( a_1 + a_2 \right) x^3 + \left( b_1 + b_2 \right) x^2 + 2x \notin H$$

Por lo tanto,

$$p(x) + q(x) \notin H$$

En consecuencia H no es un subespacio de V.

**f**) i) $0 \in \mathrm{H}$ , por lo tanto $H \neq \Phi$

Sean $p(x) = a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x \in H$ , $q(x) = a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x \in H$ y $\alpha \in R$

ii) Veamos si $p(x) + q(x) \in H$

$$p(x) + q(x) = \left( a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x \right) + \left( a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x \right) = \left( a_1 + a_2 \right) x^3 + \left( b_1 + b_2 \right) x^2 + \left( c_1 + c_2 \right) x$$

Por lo tanto,

$$p(x) + q(x) \in H$$

iii) Veamos si $\alpha\, p(x) \in H$

$$\alpha\, p(x) = \alpha \left( a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x \right) = \left( \alpha\, a_1 \right) x^3 + \left( \alpha\, b_1 \right) x^2 + \left( \alpha\, c_1 \right) x$$

En consecuencia

$$\alpha\, p(x) \in H$$

De i), ii) y iii) se concluye que H es un subespacio de V.

**g**) i) $\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\in \mathrm{H}$ , por lo tanto $H\neq\Phi$

Sean $\vec{u}=\begin{pmatrix}a_1+b_1i\\0\\c_1+d_1i\end{pmatrix}\in H$ y $\vec{v}=\begin{pmatrix}a_2+b_2i\\0\\c_2+d_2i\end{pmatrix}\in H$ y $\alpha\in R$

ii) Veamos si $\vec{u}+\vec{v}\in H$

$$\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}a_1+b_1i\\0\\c_1+d_1i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_2+b_2i\\0\\c_2+d_2i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i\\0\\(c_1+c_2)+(d_1+d_2)i\end{pmatrix}$$

En consecuencia $\vec{u}+\vec{v}\in H$

iii) Veamos si $\alpha\vec{u}\in H$

$$\alpha\vec{u}=\alpha\begin{pmatrix}a_1+b_1i\\0\\c_1+d_1i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a_1+\alpha b_1i\\0\\\alpha c_1+\alpha d_1i\end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\alpha\vec{u}\in H$$

De i), ii) y iii) se concluye que H es un subespacio de V.

**5**. Sea $\overrightarrow{x_0}$ un vector fijo de un espacio vectorial V. Muestre que el conjunto W que consta de todos los múltiplos escalares $c\,\overrightarrow{x_0}$ es un subespacio de V.

*Solución*:

Observe que $W=\left\{\vec{y}\in V\,/\,\vec{y}=c\,\overrightarrow{x_0}\;,c\in R\right\}$

i) $\vec{0}\in \mathrm{W}$ , ya que $0\,\overrightarrow{x_0}=\vec{0}$. Por lo tanto $W\neq\Phi$

Sean $\vec{u}\in W$ , $\vec{v}\in W$ y $\alpha\in R$

Por lo tanto, existen $c_1, c_2 \in R$ tal que

$$\vec{u} = c_1 \overrightarrow{x_0} \quad \text{y} \quad \vec{v} = c_2 \overrightarrow{x_0}$$

ii) Veamos si $\vec{u} + \vec{v} \in W$

$$\vec{u} + \vec{v} = c_1 \overrightarrow{x_0} + c_2 \overrightarrow{x_0} = (c_1 + c_2)\overrightarrow{x_0}$$

En consecuencia $\vec{u} + \vec{v} \in W$

iii) Veamos si $\alpha \vec{u} \in W$

$$\alpha \vec{u} = \alpha \left(c_1 \overrightarrow{x_0}\right) = (\alpha c_1)\overrightarrow{x_0}$$

Por lo tanto

$$\alpha \vec{u} \in W$$

De i), ii) y iii) se concluye que W es un subespacio de V.

**6.** Muestre que el conjunto de todas las soluciones de $A\vec{x} = \vec{b}$, donde A es una matriz de mxn, no es un subespacio de $R^n$ si $\vec{b} \neq \vec{0}$

*Solución*:

Observe que $W = \left\{ \vec{x} \in R^n \,/\, A\vec{x} = \vec{b} \right\}$. Si $\vec{b} \neq \vec{0}$ se tiene que $\vec{0} \notin W$ (¿por qué?), en consecuencia W no es un subespacio de $R^n$ (¿por qué?).

**UNIVERSIDAD SIMÓN BOLIVAR** **Abril-Julio 2008**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS**
**MATEMÁTICA III (MA-1116)**

**PRACTICA 6**

**Contenido**: Combinación lineal y espacio generado. Independencia lineal. Base y dimensión. Espacio fila y espacio columna. Rango y nulidad.

**Nota**: Además de los ejercicios aquí propuestos los estudiantes deben realizar los ejercicios de las secciones 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7 del texto.

**1.** Determine, <u>a partir de la definición</u>, si los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan $\mathrm{R}^2$.

*Solución*:

Sea $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ cualquier vector de $\mathrm{R}^2$ y veamos si se puede escribir como una combinación lineal de los vectores dados, es decir, si existen $\alpha$ y $\beta$ en R tal que:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De aquí se obtiene el sistema

$$\begin{cases} a = \alpha + 2\beta \\ b = \alpha + \beta \end{cases}$$

que tiene solución para cualesquiera $a$ y *b* (¿por qué?): $(\beta = a - b$, y $\alpha = 2b - a)$

Luego, todo vector $\begin{pmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^2$ puede ser escrito como

$$\begin{pmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \end{pmatrix} = (2b - a)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (a - b)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, los vectores dados generan $\mathrm{R}^2$.

**2.** Diga si los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes o linealmente dependientes

*Solución*:

Supongamos que

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, se obtiene el sistema

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

cuya única solución es $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ (¿por qué?), luego $\alpha$ = $\beta$ = 0. Por lo tanto, los vectores dados son linealmente independientes.

**3**. Responda el ejercicio 1) usando el resultado obtenido en el ejercicio 2).

*Solución*:

Como dim $\mathrm{R}^2$ = 2, y los vectores $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ son linealmente independientes se tiene que $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$ es una base para $\mathrm{R}^2$, por lo tanto $\mathrm{R}^2$ = gen $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$.

**4**. Determine si los vectores $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ son linealmente independientes o linealmente dependientes.

*Solución*:

Supongamos que

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Entonces se obtiene el sistema

$$\begin{cases}\alpha & & + & \delta & = & 0\\ & 2\beta & + & 3\delta & = & 0\\ -\alpha & + \beta & & & = & 0\end{cases}$$

el cual sólo tiene la solución trivial $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ (¿por qué?), luego $\alpha=\beta=\delta=0$. En consecuencia, los vectores dados son linealmente independientes.

**5**. Determine si los vectores $1-x$, $3-x^2$ y $x$, generan $\mathrm{P}_3$ (el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual que 3).

*Solución*:

Como el conjunto generador está formado por vectores de $P_2$ (el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual que 2) no puede generar a $P_3$, por ejemplo, $x^3\in\mathrm{P}_3$ y no puede ser escrito como una combinación lineal de los vectores dados.

**6**. **a**) Determine si los vectores $1-x$, $3-x^2$ y $x$, generan $\mathrm{P}_2$ (el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual que 2). **b**) Escriba, si es posible, el polinomio $p(x)=2x^2+3$ como una combinación lineal de los vectores dados.

*Solución*:

**a**) Sea $p(x)=a+bx+cx^2$ cualquier polinomio de $P_2$ y veamos si se puede escribir como una combinación lineal de los polinomios dados, es decir, si existen $\alpha$ , $\beta$ y $\delta$ en R tal que:

$$p(x)=a+bx+cx^2 = \alpha(1-x)+\beta(3-x^2)+\delta x$$

De aquí se obtiene el sistema

$$\begin{cases} a=\alpha+3\beta \\ b=-\alpha \quad +\delta \\ c= \quad -\beta \end{cases}$$

que tiene solución para cualesquiera $a$ , $b$ y c (¿por qué?) ($\beta=-c$ , $\alpha=a+3c$ y $\delta=b+a+3c$ ).

Luego, todo polinomio $p(x)=a+bx+cx^2$ de $P_2$ puede ser escrito como:

$$p(x)=a+bx+cx^2 = (a+3c)(1-x)-c(3-x^2)+(a+b+3c)x$$

En consecuencia, los polinomios dados generan $P_2$ .

**b**) $p(x)=9(1-x)-2(3-x^2)+9x$

**7**. Determine si los vectores $-x$ , $x^2-2x$ y $3x+5x^2$ , son linealmente independientes o linealmente dependientes en $P_2$

*Solución*:

Supongamos que

$$\alpha(-x)+\beta(x^2-2x)+\delta(3x+5x^2)=0$$

Como esa ecuación es válida para toda *x*, si le damos a *x* los valores 1, -1 y 2, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -\alpha - \beta + 8\delta = 0 \\ \alpha + 3\beta + 2\delta = 0 \\ -2\alpha + 26\delta = 0 \end{cases}$$

el cual tiene infinitas soluciones de la forma $(\alpha,\beta,\delta)=(13\lambda,-5\lambda,\lambda)$ con $\lambda \in$ R, (¿por qué?).

Por ejemplo, para $\lambda=1$ se obtiene que una solución del sistema planteado es $\alpha=13$ , $\beta=-5$ , $\delta=1$ .

Por lo tanto existen escalares no todos nulos que satisfacen

$$13(-x)-5(x^2-2x)+(3x+5x^2)=0$$

En consecuencia, los vectores dados son linealmente dependientes.

Otra forma de determinar los escalares $\alpha$, $\beta$ y $\delta$ que satisfacen la ecuación

$$\alpha(-x)+\beta(x^2-2x)+\delta(3x+5x^2)=0$$

es la siguiente:

$$\alpha(-x)+\beta(x^2-2x)+\delta(3x+5x^2)=0 \Leftrightarrow (\beta+5\delta)x^2+(-\alpha-2\beta+3\delta)x=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha - 2\beta + 3\delta = 0 \\ \beta + 5\delta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13\lambda \\ -5\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \text{ con } \lambda \in \mathrm{R}.$$

**8**. En $M_{22}$ (el espacio vectorial de todas las matrices reales 2x2, determine si los vectores $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes o linealmente dependientes.

*Solución*:

Supongamos que

$$\alpha\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces se obtiene el sistema

$$\begin{cases} 2\alpha = 0 \\ -\alpha - 3\beta = 0 \\ 4\alpha + \beta = 0 \\ 5\beta = 0 \end{cases}$$

cuya única solución es $\alpha=\beta=0$ (¿por qué?).

Por lo tanto, los vectores dados son linealmente independientes.

**9**. En $M_{22}$ halle la dimensión del subespacio generado por $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

*Solución*:

Sea W = gen $\left\{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\right\}$, como los vectores dados son linealmente independientes ¿por qué?, se tiene que el conjunto $\left\{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\right\}$ es una base para W. En consecuencia dim W = 2.

**10**. Si W es el subespacio del ejercicio 9) ¿Es W = $M_{22}$?

*Solución*:

No, ¿por qué?

**11.** Sea H = $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : x + y + z = 0 \right\}$, diga si H es un subespacio de $R^3$. En caso afirmativo, halle la dimensión de H y una base para H.

*Solución*:

H es un subespacio de $R^3$ (¿por qué?).

Para determinar una base para H, hallemos los vectores que generan H.

Note que si $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathrm{H}$ entonces sus componentes satisfacen la ecuación: $x + y + z = 0$, si resolvemos para *x*, resulta $x = -y - z$, es decir, $\vec{x}$ es de la forma

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $\vec{x}$ se puede escribir como una combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, y por lo tanto,

$$\text{H = gen } \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Como los vectores son linealmente independientes (¿por qué?), una base B para H es el conjunto

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y dim H = 2}$$

**12**. Sea S = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$,

**a)** Determine una base para el subespacio W = gen S
**b)** Halle dim W.

*Solución*:

**a**) Veamos si los vectores son linealmente independientes o linealmente dependientes. Supongamos entonces que:

$$\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\omega\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Entonces se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}\alpha+\delta-\omega=0\\ \beta+\delta+\omega=0\\ \beta+\delta+\omega=0\\ \alpha+\delta-\omega=0\end{cases}$$

El cual tiene infinitas soluciones (¿por qué?). Por lo tanto, los vectores dados son linealmente dependientes.

Hallemos el subespacio generado por S.

Observe que si $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in W$ , entonces A puede ser escrita como una combinación lineal de los vectores de S, es decir,

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\omega\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Entonces, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}\alpha+\delta-\omega=a\\ \beta+\delta+\omega=b\\ \beta+\delta+\omega=c\\ \alpha+\delta-\omega=d\end{cases}$$

El cual tiene solución sólo si $c-b=0, \quad \text{y} \quad d-a=0$ (¿por qué?).

Luego

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_{22}: c=b \quad \text{y} \quad a=d\right\}=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

Como los vectores $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ son linealmente independientes (¿por qué?), el conjunto

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

es una base para W.

**b**) dim W =2

**13.** **a**) Determine una base para el subespacio W de $P_3$ que consta de todos los vectores de la forma $at^3 + at^2 + ct + c$ .
**b**) Halle dim W
**c**) ¿Es $W = P_3$ ?

*Solución*:

**a**) Se tiene que

$$W = \{p(t) \in P_3 : p(t) = at^3 + at^2 + ct + c\}$$

Dado que

$$at^3 + at^2 + ct + c = a(t^3 + t^2) + c(t+1)$$

$$W = gen\{t^3 + t^2 , t+1\}$$

Como los vectores $(t^3 + t^2)$ y $(t+1)$ son linealmente independientes (¿por qué?), una base B para W es el conjunto

$$B = \{t^3 + t^2 , t+1\}$$

**b**) dim W = 2, **c**) No (¿por qué?)

**14**. Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores linealmente independientes de un espacio vectorial V. Demuestre que los vectores $\vec{u} + \vec{v} - \overrightarrow{2w}$, $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$ y $\vec{u} + \vec{w}$ son linealmente independientes.

*Solución*:

Supongamos

$$\alpha\left(\vec{u} + \vec{v} - \overrightarrow{2w}\right) + \beta\left(\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}\right) + \delta\left(\vec{u} + \vec{w}\right) = \vec{0} \quad (\ *\ )$$

De donde

$$(\alpha + \beta + \delta)\vec{u} + (\alpha - \beta)\vec{v} + (-2\alpha - \beta + \delta)\vec{w} = \vec{0}$$

Como $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, la ecuación anterior se cumple si y sólo si:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \delta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ -2\alpha - \beta + \delta = 0 \end{cases}$$

El cual solución única $\alpha = \beta = \delta = 0$ (¿por qué?)

En consecuencia, la ecuación ( * ) se cumple si y sólo si $\alpha = \beta = \delta = 0$, por lo tanto, los vectores $\vec{u} + \vec{v} - \overrightarrow{2w}$, $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$ y $\vec{u} + \vec{w}$ son linealmente independientes.

**15**. Demuestre que si los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ de $R^n$ son ortogonales y no nulos, entonces son linealmente independientes.

*Solución*:

Supongamos

$$\alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2} = \vec{0}$$

$$\alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{v_1} \cdot \left(\alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2}\right) = \overrightarrow{v_1} \cdot \vec{0} \Rightarrow \alpha\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0 \Rightarrow \alpha\left|\overrightarrow{v_1}\right|^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v_1} = \vec{0} \quad \text{o} \quad \alpha = 0$$

Como $\overrightarrow{v_1} \neq \vec{0}$ se tiene que $\alpha = 0$. En forma análoga se demuestra que $\beta = 0$.

En consecuencia,

$$\alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

Por lo tanto, los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ son linealmente independientes.

Nota: Justifique cada uno de los pasos de la demostración anterior.

**Nota**: el ejercicio que sigue a continuación corresponde a parte de la materia que se evaluará en el tercer parcial

**16**. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, halle el espacio nulo $N_A$, la nulidad $\nu(A)$, la imagen (Imagen A), el rango $\rho(A)$, una base para el espacio fila $R_A$ y una base para el espacio columna $C_A$.

*Solución*:

$$N_A = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : A\vec{v} = \vec{0} \right\}$$

Luego, para hallar $N_A$, se debe resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo cual implica resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 2x - 4y - 2z = 0 \\ -3x + 6y + 3z = 0 \end{cases}$$

El cual tiene infinitas soluciones de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ con } y, z \in R$$

Por lo tanto

$$N_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

En consecuencia $\nu(A) = 2$ ¿por qué?

Como $\nu(A) + \rho(A) = 3$ (número de columnas de A) se tiene que $\rho(A) = 3 - 2 = 1$

Se sabe que Imagen A = $C_A$. Hallemos entonces $C_A$.

$C_A$ es el espacio generado por los vectores columnas de A. Es decir,

$$C_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

Consideremos la matriz cuyas filas son los vectores columnas de A , es decir $A^t$

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

La cual es equivalente por renglones a la matriz

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ¿por qué?}$$

Se tiene que $R_{A^t} = R_B$ , en consecuencia, una base B ‘ para $C_A$ (¿por qué?) es el conjunto

$$B' = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$$

Luego,

$$\text{Imagen } A = C_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$$

$R_A$ es el espacio generado por los vectores filas de A. Es decir,

$$R_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

Como la matriz A es equivalentes por renglones a la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ¿por qué?}$$

Se tiene que $R_A = R_C$, en consecuencia, una base C ‘ para $R_A$ (¿por qué?) es el conjunto

$$C' = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Luego,

$$R_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Observe que

$$\dim \text{Imagen } A = \rho(A) = \dim R_A = \dim C_A$$

**UNIVERSIDAD SIMÓN BOLI VAR** **Abril-Julio 2008**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS**
**MATEMÁTICA III (MA-1116)**

**PRACTICA 7**

**Contenido**: Espacio con producto interno. Vectores ortogonales. Norma de un vector. Conjuntos ortogonales y ortonormales. Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt. Matriz ortogonal. Complemento ortogonal. Teoremas de proyección y aproximación de la norma.

**Nota**: Además de los ejercicios aquí propuestos los estudiantes deben realizar los ejercicios de las secciones 4.9 y 4.11 del texto.

**1**. En $R^3$ considere el producto

$$\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

donde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

**a)** Verifique que $\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle$ es un producto interior.

**b)** Si W = gen $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, halle una base ortonormal para W.

**c)** Halle $W^{\perp}$.

**d)** Halle una base ortonormal para $W^{\perp}$.

**e)** Halle $\text{proy}_{W\perp} \vec{v}$, donde $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**f)** Halle $\text{proy}_W \vec{v}$.

**g)** Halle la distancia d de $\vec{v}$ a $W^{\perp}$.

*Solución*:

**a**) Se debe verificar que cumple las condiciones de producto interno.

**b**) Note que el conjunto B = $\left\{ \vec{v_1}, \vec{v_2} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para W, ya que los vectores dados son linealmente independientes. (¿por qué?). Hallemos entonces una base B'= $\left\{ \vec{u_1}, \vec{u_2} \right\}$ ortonormal para W. (¿por qué debe tener dos vectores?), para ello apliquemos el proceso ortonormalización de Gramm-Schmidt:

i) Calculemos $\vec{u_1}$ :

$$\vec{u_1} = \frac{\vec{v_1}}{\left\| \vec{v_1} \right\|}$$

donde: $\left\|\overrightarrow{v_1}\right\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \right\rangle} = \sqrt{3 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$

Por lo tanto,

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ii) Calculemos $\overrightarrow{u_2}$ :

$$\overrightarrow{v_2}' = \overrightarrow{v_2} - \left\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{u_1} \right\rangle \overrightarrow{u_1}$$

$$\overrightarrow{v'_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{u_2} = \frac{\overrightarrow{v'_2}}{\left\|\overrightarrow{v'_2}\right\|}$$

donde:

$$\left\|\overrightarrow{v'_2}\right\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{v'_2}, \overrightarrow{v'_2} \right\rangle} = \frac{2}{3}\sqrt{7}\ .$$

En consecuencia,

$$\overrightarrow{u_2} = \frac{1}{3\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

El conjunto B'= $\left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right\}$= $\left\{ \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$ es una base ortonormal para W

**c**) Hallemos $W^{\perp}$. Por definición $W^{\perp}$ está formado por todos los vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $R^3$ que son ortogonales a todos los vectores de W, es decir,

$$W^{\perp} = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : \left\langle \vec{v}, \vec{w} \right\rangle = 0, \text{ para toda } \vec{w} \in W \right\}$$

por lo tanto, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ satisface:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 6x + 2y + 2z = 0 \quad \text{y} \quad \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 6x + 2y = 0$$

En consecuencia,

$$W^{\perp} = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^3 : 6x + 2y + 2z = 0 \ y \ 6x + 2y = 0 \right\}.$$

**d**) Hallemos primero una base para $W^{\perp}$, para ello resolvamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 6x + 2y + 2z = 0 \\ 6x + 2y \quad = 0 \end{cases}$$

el cual tiene por solución: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -3x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathrm{R}$ , (¿por qué?). Por lo tanto:

$$W^{\perp} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Y el conjunto B = $\left\{ \overrightarrow{v_1} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para $W^{\perp}$.

Hallemos ahora una base $B' = \left\{ \overrightarrow{u_1} \right\}$ ortonormal para $W^{\perp}$. (¿por qué debe tener un vector?), para ello apliquemos el proceso de ortonormalización de Gramm-Schmidt:

Calculemos $\overrightarrow{u_1}$ :

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{\overrightarrow{v_1}}{\left\| \overrightarrow{v_1} \right\|}$$

donde:

$$\left\| \overrightarrow{v_1} \right\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \right\rangle} = \sqrt{3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) \cdot (-3) + 0 \cdot 0} = \sqrt{21}$$

En consecuencia:

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, una base ortonormal para $W^{\perp}$ es el conjunto

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Note que

$$\dim W + \dim W^{\perp} = 2 + 1 = 3 = \dim R^3.$$

**e**) Hallemos $\text{proy}_{W\perp}\vec{v}$.

Como B' = $\{\vec{u_1}\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}\right\}$ es una base ortonormal para $W^{\perp}$ y dado que

$$\text{proy}_{W\perp}\vec{v} = \langle\vec{v},\vec{u_1}\rangle\vec{u_1}$$

se tiene que:

$$\text{proy}_{W\perp}\vec{v} = \left\langle\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix} = \frac{15}{21}\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix} = \frac{5}{7}\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$$

**f**) Hallemos $\text{proy}_{W}\vec{v}$.

Como

$B' = \{\vec{u_1},\vec{u_2}\} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\frac{1}{3\sqrt{7}}\begin{pmatrix}2\\1\\-7\end{pmatrix}\right\}$ es una base ortonormal para W

Se puede calcular $\text{proy}_{W}\vec{v}$ a partir de la definición:

$$\text{proy}_{W}\vec{v} = \langle\vec{v},\vec{u_1}\rangle\vec{u_1} + \langle\vec{v},\vec{u_2}\rangle\vec{u_2}$$

Pero también, como W tiene dimensión finita, al aplicar el teorema de proyección, se cumple que

$$\text{proy}_{W}\vec{v} = \vec{v} - \text{proy}_{W\perp}\vec{v}$$

luego,

$$\text{proy}_{W}\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix} - \frac{5}{7}\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix} = \frac{8}{7}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

**g**) Hallemos la distancia d de $\vec{v}$ a $W^{\perp}$.

Dado que

$$d = \left\|\vec{v} - proy_{w\perp}\vec{v}\right\| = \left\|proy_{w}\vec{v}\right\|$$

se tiene que

$$d = \left\|\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix} - \frac{5}{7}\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}\right\| = \left\|\frac{8}{7}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\| = \left\|proy_{w}\vec{v}\right\| = \frac{8}{7}\sqrt{14}$$

**2.** En $M_{22}$ considere el producto

$$\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}\left(B^t A\right)$$

donde $A,B\in M_{22}$, y tr(D) es la traza de una matriz D que se define como la suma de los elementos de la diagonal principal.

**a**) Verifique que $\langle A,B\rangle$ es un producto interior.

**b)** Si W = gen $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\right\}$, halle una base ortonormal para W.

**c)** Halle $W^{\perp}$.

**d)** Halle una base ortonormal para $W^{\perp}$.

**e)** Halle $\mathrm{proy}_{W\perp}\vec{v}$, donde $\vec{v}=\begin{pmatrix}2&1\\-3&0\end{pmatrix}$

**f)** Halle $\mathrm{proy}_{W}\vec{v}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}2&1\\-3&0\end{pmatrix}$

**g)** Halle la distancia d de $\vec{v}$ a W.

*Solución*:

**a**) Se debe verificar que cumple las condiciones de producto interno.

**b**) Hallemos primero una base para W. Por el ejercicio 12 de la práctica 6, tenemos que el conjunto $B=\left\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$ es una base para W. Hallemos entonces una base $B'=\left\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right\}$ ortonormal para W. (¿por qué debe tener dos vectores?), para ello apliquemos el proceso de ortonormalización de Gramm-Schmidt:

i) Calculemos $\overrightarrow{u_1}$:

$$\overrightarrow{u_1}=\frac{\overrightarrow{v_1}}{\left\|\overrightarrow{v_1}\right\|}$$

donde:

$$\left\|\overrightarrow{v_1}\right\|=\sqrt{\left\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_1}\right\rangle}=\left[\left\langle\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\mathrm{tr}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

Luego:

$$\overrightarrow{u_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

ii) Calculemos $\overrightarrow{u_2}$:

$$\overrightarrow{v'_2}=\overrightarrow{v_2}-\left\langle\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{u_1}\right\rangle\overrightarrow{u_1}$$

$$\overrightarrow{v'_2}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}-\left\langle\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

Note que, en este ejemplo, $\overrightarrow{v'_2} = \overrightarrow{v_2}$ , esto es porque los vectores de la base B son ortogonales (verifíquelo). En este caso, para hallar la base ortonormal solo se requería normalizar los vectores de la base B.

$$\overrightarrow{u_2} = \frac{\overrightarrow{v_2}}{\left\|\overrightarrow{v_2}\right\|}$$

donde: $\left\|\overrightarrow{v_2}\right\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \right\rangle} = \left[\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ ,

Por lo tanto:

$$\overrightarrow{u_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El conjunto $B' = \left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ es una base ortonormal para W

**c**) Hallemos W$^{\perp}$. Por definición W$^{\perp}$ está formado por todos los vectores $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $M_{22}$ que son ortogonales a todos los vectores de W, es decir,

$$W^{\perp} = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22} : \left\langle \vec{v}, \vec{w} \right\rangle = 0, \text{ para toda } \vec{w} \in \mathrm{W} \right\}$$

por lo tanto, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ satisface:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = a + d = 0 \quad \text{y} \quad \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = c + b = 0$$

En consecuencia:

$$W^{\perp} = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22} : a + \mathrm{d} = 0 \,,\, c + b = 0 \right\}$$

**d**) Hallemos ahora una base para W$^{\perp}$.

Dado que: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in$ W$^{\perp}$, si $d = -a$ y $c = -b$ .

Se tiene que toda matriz de W se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$W^{\perp} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y el conjunto $B = \left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ es una base para $W^{\perp}$, ya que los vectores de B son linealmente independientes y generan a $W^{\perp}$.

Hallemos ahora una base $B' = \left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right\}$ ortonormal para $W^{\perp}$. (¿por qué debe tener dos vectores?).

Observe que

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

es decir, los vectores de la base B también son ortogonales, luego, para hallar una base B' ortonormal solo se requiere normalizar dichos vectores:

Calculemos $\overrightarrow{u_1}$:

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{\overrightarrow{v_1}}{\left\|\overrightarrow{v_1}\right\|}$$

donde:

$$\left\|\overrightarrow{v_1}\right\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \right\rangle} = \left[\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

En consecuencia:

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculemos $\overrightarrow{u_2}$:

$$\overrightarrow{u_2} = \frac{\overrightarrow{v_2}}{\left\|\overrightarrow{v_2}\right\|}$$

$$\left\|\overrightarrow{v'_2}\right\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{v'_2}, \overrightarrow{v'_2} \right\rangle} = \left[\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

De donde:

$$\overrightarrow{u_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, una base ortonormal para $W^{\perp}$ es el conjunto

$$B' = \left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Note que dim W + dim $W^{\perp}$ = 2 + 2 = 4 = dim $M_{22}$.

**e**) Hallemos $\text{proy}_{W\perp}\,\vec{v}$.

Como $B' = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base ortonormal para $W^{\perp}$.

Dado que

$$\text{proy}_{W\perp}\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{u_1} \rangle \vec{u_1} + \langle \vec{v}, \vec{u_2} \rangle \vec{u_2}$$

se tiene que:

$$\text{proy}_{W\perp}\vec{v} = \text{tr}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \text{tr}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

**f**) Hallemos $\text{proy}_W \vec{v}$.

Como

$B' = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base ortonormal para W

Se puede calcular $\text{proy}_W \vec{v}$ a partir de:

$$\text{proy}_W\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{u_1} \rangle \vec{u_1} + \langle \vec{v}, \vec{u_2} \rangle \vec{u_2}$$

Pero también, como W tiene dimensión finita, se cumple que

$$\text{proy}_W\vec{v} = \vec{v} - \text{proy}_{W\perp}\vec{v}$$

Luego,

$$\text{proy}_W\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**g**) Hallemos la distancia d de $\vec{v}$ a W.

Dado que

$$d = \left\| \vec{v} - proy_w \vec{v} \right\| = \left\| proy_{w\perp} \vec{v} \right\|$$

Se tiene que

$$d = \left\| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right\| = \left[ \text{tr}\left( \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5+5} = \sqrt{10}$$

**3**. En $P_2$ considere el producto

$$\langle \mathrm{p},\mathrm{q}\rangle = \int_0^1 \mathrm{p}(t)\mathrm{q}(t)dt$$

donde p, q $\in P_2$.

**a)** Verifique que $\langle \mathrm{p},\mathrm{q}\rangle$ es un producto interior.

**b)** Si $W^{\perp} = \{\mathrm{p} \in \mathrm{P}_2 : \mathrm{p}(t) = a + at, a \in \mathrm{R}\}$ halle una base ortonormal para $W^{\perp}$.

**c)** ¿Cuál es la dimensión de W.

**d)** Halle una base para W.

**e)** Halle $\mathrm{proy}_W \vec{v}$, donde $\vec{v} = 3t^2$

**f)** Halle la distancia d de $\vec{v}$ a W.

*Solución*:

**a**) Se debe verificar que cumple las condiciones de producto interno

**b**) Note que $W^{\perp} = \mathrm{gen}\{1+t\}$, ¿(por qué?). Luego, el conjunto

$$B = \{\vec{v_1}\} = \{1+t\}$$

es una base para $W^{\perp}$.

Hallemos entonces una base $B' = \{\vec{u_1}\}$ ortonormal para W. Para ello apliquemos el proceso de ortonormalización de Gramm-Schmidt:

Calculemos $\vec{u_1}$:

$$\vec{u_1} = \frac{\vec{v_1}}{\|\vec{v_1}\|}$$

donde:

$$\|\vec{v_1}\| = \sqrt{\langle \vec{v_1}, \vec{v_1}\rangle} = \left[\int_0^1 (1+t)(1+t)dt\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

Luego:

$$\vec{u_1} = \left(\sqrt{\frac{3}{7}}(1+t)\right)$$

El conjunto $B' = \{\vec{u_1}\} = \left\{\sqrt{\frac{3}{7}}(1+t)\right\}$ es una base ortonormal para $W^{\perp}$

**c**) dim W = dim $P_2$ – dim $W^{\perp}$ = 3 – 1 = 2

**d**) Hallemos W. Por definición W está formado por todos los vectores p de $P_2$ que son ortogonales a todos los vectores de $W^{\perp}$, es decir,

$$= \left\{\vec{v} = \mathrm{p}(\mathrm{t}) = a + bt + ct^2 \in \mathrm{P}_2 : \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = 0, \text{ para toda } \vec{w} \in W^{\perp}\right\}$$

Por lo tanto, p($t$) satisface:

$$\int_0^1 (a + bt + ct^2)(1+t)dt = 0$$

$$\int_0^1 (a + (a+b)t + (b+c)t^2 + ct^3)dt = 0$$

$$\left[at+\frac{a+b}{2}t^2+\frac{(b+c)}{3}t^3+\frac{c}{4}t^4\right]_0^1=0$$

$$a+\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{3}+\frac{c}{4}=0$$

$$\frac{3a}{2}+\frac{5b}{6}+\frac{7c}{12}=0$$

En consecuencia:

$$W=\left\{a+bt+ct^2\in P_2 : c=\frac{-18a-10b}{7}\right\}$$

Es decir,

$$W=\text{gen}\left\{1-\frac{18}{7}t^2\ ,\ t-\frac{10}{7}t^2\right\}.$$

Como los vectores $\left\{1-\frac{18}{7}t^2 \text{ y } t-\frac{10}{7}t^2\right\}$ son linealmente independientes (¿por que?), una B para W es el conjunto:

$$B=\left\{1-\frac{18}{7}t^2\ ,\ t-\frac{10}{7}t^2\right\}.$$

**e**) Como $W^{\perp}$ tiene dimensión finita, para hallar $\text{proy}_w\vec{v}$, donde $\vec{v}=3t^2$, se cumple que

$$\text{proy}_w\vec{v}=\vec{v}-\text{proy}_{w\perp}\vec{v}$$

Calculemos entonces la proyección de $\vec{v}$ sobre $W^{\perp}$.

Dado que $B'=\{\overrightarrow{u_1}\}=\left\{\sqrt{\frac{3}{7}}+\sqrt{\frac{3}{7}}t\right\}$ es una base ortonormal para $W^{\perp}$, y como

$$\text{proy}_{w\perp}\vec{v}=\langle\vec{v},\overrightarrow{u_1}\rangle\overrightarrow{u_1}$$

se tiene que:

$$\text{proy}_{w\perp}\vec{v}=\left\langle 3t^2,\sqrt{\frac{3}{7}}(1+t)\right\rangle\left(\sqrt{\frac{3}{7}}(1+t)\right)=\left(\frac{3}{7}(1+t)\right)3\int_0^1(1+t)t^2dt=\frac{3}{4}(1+t)$$

Por lo tanto;

$$\text{proy}_w\vec{v}=3t^2-\frac{3}{4}(1+t)=-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}t+3t^2$$

**f**) Hallemos la distancia d de $\vec{v}$ a W.

Dado que

$$d=\left\|\vec{v}-proy_w\vec{v}\right\|=\left\|proy_{w\perp}\vec{v}\right\|$$

Se tiene que

$$d=\left\|\frac{3}{4}+\frac{3}{4}t\right\|=\frac{3}{4}\sqrt{\int_0^1(1+t)^2dt}=\frac{\sqrt{21}}{4}$$

**UNIVERSIDAD SIMÓN BOLIVAR** **Abril - Julio 2008**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS**
**MATEMÁTICA III (MA-1116)**

**PRACTICA 8**

**Contenido**: Transformaciones lineales. Propiedades de las transformaciones lineales. Imagen y núcleo. Matriz asociada a una transformación lineal.

**Nota**: Además de los ejercicios aquí propuestos los estudiantes deben realizar los ejercicios de las secciones 5.1, 5.2 y 5.3 del texto.

**1.** En cada caso, determine si la función T es una transformación lineal.

**a)** T: $R^4 \to R^2$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix}$

**b)** T: $R^3 \to R^2$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix}$

**c)** T: $M_{23} \to M_{22}$, T(A)=AB, donde $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**d)** T: $P_2 \to P_1$, $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 + a_2 x$

*Solución*:

**a**) Sean $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \in R^4$ y $\alpha \in R$

**i**) Veamos si $T(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = T(\overrightarrow{v_1}) + T(\overrightarrow{v_2})$

$$T(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \\ w_1 + w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + (z_1 + z_2) \\ (y_1 + y_2) + (w_1 + w_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + z_1 \\ y_1 + w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + z_2 \\ y_2 + w_2 \end{pmatrix} = T(\overrightarrow{v_1}) + T(\overrightarrow{v_2})$$

Luego: $T(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = T(\overrightarrow{v_1}) + T(\overrightarrow{v_2})$, para todo par de vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ de $R^4$.

**ii**) Veamos si $T(\alpha\overrightarrow{v_1}) = \alpha T(\overrightarrow{v_1})$

$$\mathrm{T}\left(\alpha\overrightarrow{v_1}\right)=\mathrm{T}\begin{pmatrix}\alpha x_1\\ \alpha y_1\\ \alpha z_1\\ \alpha w_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1+\alpha z_1\\ \alpha y_1+\alpha w_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(x_1+z_1)\\ \alpha(y_1+w_1)\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x_1+z_1\\ y_1+w_1\end{pmatrix}=\alpha\mathrm{T}\left(\overrightarrow{v_1}\right)$$

Por lo tanto, $\mathrm{T}\left(\alpha\overrightarrow{v_1}\right)=\alpha\mathrm{T}\left(\overrightarrow{v_1}\right)$, para todo vector $\overrightarrow{v_1}$ de $R^4$ y para todo $\alpha\in$ R.

De i) y ii) se concluye que T es una transformación lineal. (Justifique cada uno de los pasos de la demostración)

**b**) No es una transformación lineal (¿por qué?)

**c**) Sean A, C $\in M_{23}$ y $\alpha\in$ R

**i**) Veamos si $\mathrm{T}(\mathrm{A}+\mathrm{C})=\mathrm{T}(\mathrm{A})+\mathrm{T}(\mathrm{C}))$

$$T(A+C) = (A + C)\, B = AB + CB = T(A) + T(C)$$

Luego: T(A+C) = T(A) + T(C) para todo par de matrices A y C de $M_{23.}$

**ii**) Veamos si $\mathrm{T}(\alpha\mathrm{A})=\alpha\mathrm{T}(\mathrm{A})$

$$\mathrm{T}(\alpha\mathrm{A})=(\alpha\mathrm{A})\mathrm{B}=\alpha(\mathrm{AB})=\alpha\mathrm{T}(\mathrm{A})$$

Por lo tanto, $\mathrm{T}(\alpha\mathrm{A})=\alpha\mathrm{T}(\mathrm{A})$, para toda matriz A de $M_{23}$ y para todo $\alpha\in$ R.

De i) y ii) se concluye que T es una transformación lineal. (Justifique cada uno de los pasos de la demostración)

**d**) Sean $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ , $q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2\in$ $P_2$ y $\alpha\in$ R

**i**) Veamos si $\mathrm{T}(\mathrm{p}(x)+\mathrm{q}(x))=\mathrm{T}(\mathrm{p}(x))+\mathrm{T}(\mathrm{q}(x))$

$$\begin{aligned}\mathrm{T}(\mathrm{p}(x)+\mathrm{q}(x))&=\mathrm{T}\left((a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2\right)\\&=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)x\\&=(a_1+a_2x)+(b_1+b_2x)\\&=\mathrm{T}\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)+\mathrm{T}\left(b_0+b_1x+b_2x^2\right)\\&=\mathrm{T}(\mathrm{p}(x))+\mathrm{T}(\mathrm{q}(x))\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{T}(\mathrm{p}(x)+\mathrm{q}(x))=\mathrm{T}(\mathrm{p}(x))+\mathrm{T}(\mathrm{q}(x))$ para todo par de polinomios p y q de $P_{2.}$

**ii**) Veamos si $\mathrm{T}(\alpha\mathrm{p}(x))=\alpha\mathrm{T}(\mathrm{p}(x))$

$$\mathrm{T}(\alpha\mathrm{p}(x))=\mathrm{T}\left(\alpha a_0+\alpha a_1x+\alpha a_2x^2\right)=\alpha a_1+\alpha a_2x=\alpha(a_1+a_2x)=\alpha\mathrm{T}(\mathrm{p}(x))$$

Por lo tanto, $T(p(x)+q(x)) = T(p(x)) + T(q(x))$ , para todo polinomio p de $P_2$ y para todo $\alpha \in$ R.

De i) y ii) se concluye que T es una transformación lineal. (Justifique cada uno de los pasos de la demostración)

**2**. Halle el núcleo, la imagen, la nulidad y el rango de la transformación lineal del ejercicio 1a).

*Solución*:

Se tiene que:

$$\text{nuT} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in R^4 : T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Hallemos todos los vectores de $R^4$ que satisfacen la condición planteada.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y+w=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=-w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha, \beta \in R$$

Luego,

$$\text{nuT} = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Como los vectores $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes (¿por qué?) se tiene que:

$$\nu(T) = \dim \text{nuT} = 2$$

Hallemos ahora la imagen de T

$$\text{imagen } T = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in R^2 : T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \text{ para algún } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in R^4 \right\}$$

Note que

$$\mathrm{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=u \\ y+w=v \end{cases}$$

Dado que el sistema de ecuaciones planteado tiene solución para cualesquiera *u* y *v* (¿por qué?)

$$\text{Imagen T} = R^2$$

Por lo tanto

$$\rho(\mathrm{T}) = \dim \text{imagen T} = 2$$

¿Cómo se puede hallar $\rho(\mathrm{T})$ sin obtener previamente la imagen de T?

**3**. Halle el núcleo, la imagen, la nulidad y el rango de la transformación lineal del ejercicio 1d.

*Solución*:

$$\mathrm{nuT} = \left\{ a+bx+cx^2 \in \mathrm{P}_2 : \mathrm{T}\left(a+bx+cx^2\right) = \vec{0} \right\}$$

$$\mathrm{T}\left(a+bx+cx^2\right) = \vec{0} \Leftrightarrow b+cx = \vec{0} = 0+0x \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow a+bx+cx^2 = a$$

Luego,

$$\mathrm{nuT} = \mathrm{gen}\ \{1\}$$

Por lo tanto,

$$\nu(\mathrm{T}) = \dim \mathrm{nuT} = 1$$

Hallemos ahora la imagen de T

$$\mathrm{imagenT} = \left\{ a+bx \in \mathrm{P}_1 : \mathrm{T}\left(c+dx+ex^2\right) = a+bx, \text{ para algún } c+dx+ex^2 \in \mathrm{P}_2 \right\}$$

$$\mathrm{T}\left(c+dx+ex^2\right) = a+bx \Leftrightarrow d+ex = a+bx \Leftrightarrow \begin{cases} d=a \\ e=b \end{cases}$$

Dado que este sistema en las incógnitas *c*, *d* y *e*, tiene solución para cualesquiera *a* y *b*, se tiene que

$$\text{Imagen T} = \mathrm{P}_1 = \text{gen } \{1, \mathrm{t}\}$$

Por lo tanto

$$\rho(\mathrm{T}) = \dim \text{imagen T} = 2$$

**4**. Halle la matriz asociada $A_T$ en la base canónica a la transformación lineal del ejercicio 1a .

*Solución*:

La base canónica B de $R^4$ es el conjunto

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Hallemos la imagen de cada uno de los vectores de la base:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, la matriz asociada es

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe que como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

se tiene que:

$$A_T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

Por otra parte, dado que nuT = Nu $A_T$ e Imagen T = Imagen $A_T$ = $C_{AT}$, se tiene que:

**5**. Halle el espacio nulo y la imagen de la matriz

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Solución*:

$$\mathrm{nuA}_T = \mathrm{gen}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ (¿por qué?, verifíquelo)

Imagen $A_T$ = $R^2$ (¿por qué?, verifíquelo)

**6**. Halle la matriz asociada en la base canónica a la transformación del problema 1d.

*Solución*:

La base canonica de $P_2$ es el conjunto $B = \{1, t, t^2\}$ y la base canónica de $P_1$ es el conjunto $B_1 = \{1, t\}$.

Hallemos la imagen de cada uno de los vectores de la base B:

$$T(1) = 0 = 0 + 0t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1} \;,\; T(t) = 1 = 1 + 0t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1} \;,\; T(t^2) = t = 0 + t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_1}$$

Luego, la matriz asociada es:

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**8.** Halle la transformación lineal $T:R^2 \to R^2$, cuya matriz asociada es:

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Solución*:

Sea $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$. Busquemos la imagen de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y \\ y \end{pmatrix},$$

Es decir, T es la transformación lineal que a todo vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$ lo transforma en el vector $\begin{pmatrix} x - 3y \\ y \end{pmatrix}$ de $R^2$.

**9.** Halle la transformación lineal $T:R^2 \to R^2$, cuya matriz asociada es:

$$A_T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

*Solución*:

Sea $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$. Busquemos la imagen de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha & -y\operatorname{sen}\alpha \\ x\operatorname{sen}\alpha & +y\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Es decir, T es la transformación lineal que a todo vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^2$ lo transforma en el vector $\begin{pmatrix} x\cos\alpha & -y\operatorname{sen}\alpha \\ x\operatorname{sen}\alpha & +y\cos\alpha \end{pmatrix}$ de $R^2$.

**10**. Si T es la transformación lineal del ejercicio 9, haga la sustitución

$$x = r\cos\theta \text{ y } y = r\operatorname{sen}\theta$$

**a**) Obtenga la imagen del vector $\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$

**b**) Sea P cualquier punto del plano con coordenadas cartesianas $(x, y)$ sea *r* la distancia del origen O al punto P, sea $\theta$ el ángulo formado por el vector $\overrightarrow{OP}$ y el eje positivo de las *x*. El par $(r, \theta)$ se le denomina coordenadas polares del punto P, y las ecuaciones $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ son las ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. Interprete geométricamente esta transformación.

*Solución*:

**a**)
$$T\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\,sen\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\alpha & -r\,sen\theta\operatorname{sen}\alpha \\ r\cos\theta\,sen\alpha & +r\,sen\theta\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta+\alpha) \\ r\operatorname{sen}(\theta+\alpha) \end{pmatrix}$$

**b**) La transformación lineal T transforma cada punto del plano en coordenadas polares $(r, \theta)$ en el punto de coordenadas $(r, \theta+\alpha)$, es decir, T es una rotación del plano alrededor del origen, siendo $\alpha$ el ángulo de rotación.

**11**. Encuentre todas las transformaciones lineales de $R^2$ en $R^2$ tales que la recta $y = 0$ se transforme en la recta $x = 0$.

*Solución*:

Observe que la recta $y = 0$ es el conjunto $\{(x, 0) : x \in R\}$

Definamos las transformaciones lineales $T_{abc}$ por

$$T_{abc}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}, \quad T_{abc}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c \in R$$

Entonces

$$T_{abc}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xT_{abc}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yT_{abc}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay \\ cx + by \end{pmatrix}$$

**12**. Encuentre una transformación T: $R^3 \to R^3$ tal que

$$\text{imagen T} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^3 : 2\mathrm{x} - \mathrm{y} + \mathrm{z} = 0 \right\}$$

*Solución*:

Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{imagen T}$ se tiene que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x+z \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Es decir,

$$\text{imagen T} = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Como los dos vectores son linealmente independientes, una base B para la imagen de T es el conjunto

$$\mathrm{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Definamos la transformación lineal T por

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + yT\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + zT\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x+y \\ y \end{pmatrix}$$

Verifique que la imagen de la transformación definida es el plano de ecuación $2x - y + z = 0$

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLIVAR Abril-Julio 2008
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS
MATEMÁTICA III (MA-1116)

**PRÁCTICA 9**

**Contenido**: Autovalores y autovectores. Matrices semejantes. Diagonalización. Diagonalización ortogonal.

**Nota**: Además de los ejercicios aquí propuestos los estudiantes deben realizar los ejercicios de las secciones 6.3 y 6.4 del texto.

**1.** Para cada una de las matrices dadas:

- **i)** Halle los autovalores de la matriz A
- **ii)** Halle los autovectores correspondientes a los autovalores obtenidos en la parte i).
- **iii)** Halle los espacios propios correspondientes a cada uno de los autovalores.
- **iv)** Indique la multiplicidad algebraica y la multiplicidad geométrica de cada autovalor.
- **v)** Diga si la matriz A es diagonalizable. En caso afirmativo, halle una matriz diagonal D, y una matriz invertible P, tal que D = $P^{-1}AP$.

**a**) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, **b**) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, **c**) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

**d**) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, **e**) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, **f**) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

*Solución*:

**a**) **i**)

$$\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

Luego:

$$|\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}| = (\lambda+1)\,(\lambda-1)\,(2-\lambda).$$

Por lo tanto, los autovalores o valores propios de la matriz A son: $\lambda_1 = -1$ , $\lambda_2 = 1$ , $\lambda_3 = 2$ .

**ii**) Hallemos los vectores propios correspondientes a cada autovalor:

Para $\lambda = -1$ , sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, tal que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha \in R,$$

En consecuencia un vector propio asociado al autovalor $\lambda = -1$ de la matriz A es el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda = 1$, sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, tal que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha \in R,$$

En consecuencia un vector propio asociado al autovalor $\lambda = 1$ de la matriz A es el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda = 2$, sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, tal que

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha \in R,$$

En consecuencia un vector propio asociado al autovalor $\lambda = 2$ de la matriz A es el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

**iii**) Los espacios propios correspondientes a los autovalores $\lambda = -1$, $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ son:

$$E_{-1} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad E_1 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{y} \quad E_2 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

**iv**) La multiplicidad algebraica de cada uno de los valores propios es 1.
La multiplicidad geométrica de cada uno de los valores propios es 1.

**v**) La matriz A si es diagonalizable (¿por qué?).

Una matriz diagonal D, y una matriz invertible P, tal que D = $P^{-1}AP$, son las siguientes :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**b**) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ se tiene que:

**i**)
$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

De donde,
$$|A - \lambda I| = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

Por lo tanto, los autovalores o valores propios de la matriz A son: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

**ii**) Hallemos los vectores propios correspondientes a cada autovalor:

Para $\lambda = 1$, sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, tal que

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha \in \mathrm{R},$$

En consecuencia un vector propio asociado al autovalor $\lambda = 1$ de la matriz A es el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda = 2$, sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, tal que

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha \in \mathrm{R},$$

En consecuencia un vector propio asociado al autovalor $\lambda = 2$ de la matriz A es el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**iii**) Los espacios propios correspondientes a los autovalores $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$ son:

$$E_1 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{y} \quad E_2 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

**iv**) La multiplicidad algebraica de 1 es 1, mientras que la multiplicidad algebraica de 2 es 2.
La multiplicidad geométrica de cada uno de los valores propios es 1.

**v**) La matriz A no es diagonalizable (¿por qué?).

**c**) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que:

**i**) $$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix},$$

Luego: $|A - \lambda I| = (\lambda + 1)^2 \, (2 - \lambda)$.

Por lo tanto, los autovalores o valores propios de la matriz A son: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$.

ii) Hallemos los vectores propios correspondientes a cada autovalor.

Para $\lambda = 2$, sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, tal que

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha \in R,$$

En consecuencia un vector propio asociado al autovalor $\lambda = 2$ de la matriz A es el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda = -1$, sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha, \beta \in R,$$

En consecuencia dos vectores propios asociados al autovalor $\lambda = -1$ de la matriz A son los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**iii**) Los espacios propios correspondientes a los autovalores $\lambda = -1$ y $\lambda = 2$ son:

$$E_{-1} = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad E_2 = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

**iv**) La multiplicidad algebraica del autovalor $-1$ es 2 y la del autovalor 2 es1.

La multiplicidad geométrica del autovalor $-1$ es 2 y la del autovalor 2 es1.

**v**) La matriz A si es diagonalizable (¿por qué?).

Una matriz diagonal D, y una matriz invertible P, tal que D = $P^{-1}AP$, son las siguientes:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**d**) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ se tiene que:

**i**)
$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 3-\lambda \end{pmatrix},$$

Luego: $|A - \lambda I| = (1-\lambda)^3$.

Por lo tanto, los autovalores o valores propios de la matriz A son:, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

**ii**) Hallemos los vectores propios correspondientes al auto valor obtenido:

Para $\lambda = 1$, sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, tal que

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha \in R,$$

En consecuencia un vector propio asociado al autovalor $\lambda = 1$ de la matriz A es el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**iii**) El espacio propio correspondiente al autovalor $\lambda = 1$ es:

$$E_1 = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

**iv**) La multiplicidad algebraica del valor propio es 3, pero su multiplicidad geométrica es1.

**v**) La matriz A no es diagonalizable (¿por qué?).

**e**) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ se tiene que:

**i**) $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$,

Luego: $|A - \lambda I| = (2-\lambda)^3$.

Por lo tanto, los autovalores o valores propios de la matriz A son: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

**ii**) Hallemos los vectores propios correspondientes al autovalor 2.

Para $\lambda = 2$, sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, tal que

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha, \beta \in R,$$

En consecuencia dos vectores propios asociados al autovalor $\lambda = 2$ de la matriz A son los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**iii**) El espacio propio correspondiente al autovalor, $\lambda = 2$ es:

$$E_2 = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

**iv**) La multiplicidad algebraica del valor propio es 3, mientras que su multiplicidad geométrica es 2.

**v**) La matriz A no es diagonalizable (¿por qué?).

**f**) Da la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ se tiene que:

**i**) $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$,

Luego: $|A - \lambda I| = (3-\lambda)^3$.

Por lo tanto, los autovalores o valores propios de la matriz A son: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

**ii**) Hallemos los vectores propios correspondientes al autovalor 3.

Para $\lambda = 3$, sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, tal que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha, \beta, \delta \in \mathrm{R},$$

En consecuencia tres vectores propios asociados al autovalor $\lambda = 3$ de la matriz A son los vectores:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**iii**) El espacio propio correspondiente al autovalor, $\lambda = 3$ es:

$$\mathrm{E}_3 = \mathrm{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

**iv**) La multiplicidad algebraica del valor propio es 3, y su multiplicidad geométrica también es 3.

**v**) La matriz A si es diagonalizable (¿por qué?).

Una matriz diagonal D, y una matriz invertible P, tal que D = $P^{-1}AP$, son las siguientes :

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NOTA:

Observe que los seis ejemplos anteriores muestran los casos que se nos pueden presentar para una matriz de tamaño 3x3, en las que el los autovalores asociados a la matriz son reales:

- **a)** Que la matriz tenga tres valores propios reales y distintos. En este caso se obtienen tres vectores propios linealmente independientes y la matriz es diagonalizable.
- **b)** Que la matriz tenga tres valores propios reales pero uno de ellos con multiplicidad algebraica dos, pero que el autovalor de multiplicidad algebraica dos tenga un solo vector propio asociado (tenga multiplicidad geométrica igual a 1). En este caso la matriz no es diagonalizable.
- **c)** Que la matriz tenga tres valores propios reales pero uno de ellos con multiplicidad algebraica dos, y que el autovalor de multiplicidad algebraica dos tenga un dos vectores

propios asociados (tenga multiplicidad geométrica igual a 2). En este caso la matriz es diagonalizable.

**d)** Que la matriz tenga tres valores propios reales pero todos iguales (multiplicidad algebraica tres), pero que dicho autovalor tenga un solo vector propio asociado (tenga multiplicidad geométrica igual a 1). En este caso la matriz no es diagonalizable.

**e)** Que la matriz tenga tres valores propios reales pero todos iguales (multiplicidad algebraica tres), pero que dicho autovalor tenga solo dos vectores propios asociados (tenga multiplicidad geométrica igual a 2). En este caso la matriz no es diagonalizable.

**f)** Que la matriz tenga tres valores propios reales pero todos iguales (multiplicidad algebraica tres), pero que dicho autovalor tenga tres vectores propios asociados (tenga multiplicidad geométrica igual a 3). En este caso la matriz es diagonalizable.

El otro caso que se puede presentar es que la matriz tenga tres valores propios uno real y dos complejos. En este caso se obtienen tres vectores propios linealmente independientes y la matriz es diagonalizable.

**2.** Halle los autovalores y autovectores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

*Solución*:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 5 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

Luego: $|A - \lambda I| = (\lambda + 1 + i)\,(\lambda + 1 - i)$.

Por lo tanto, los autovalores o valores propios de la matriz A son: $\lambda_1 = -1 - i$, $\lambda_2 = -1 + i$.

Hallemos los vectores propios correspondientes a cada autovalor:

Para $\lambda = -1 + i$, sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, tal que

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}, \ \alpha \in R$$

En consecuencia un vector propio asociado al autovalor $\lambda = -1 + i$ de la matriz A es el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda = -1 - i$, sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, tal que

$$\begin{pmatrix} 2+i & -1 \\ 5 & -2+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha \in R$$

En consecuencia un vector propio asociado al autovalor $\lambda = -1 - i$ de la matriz A es el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**3**. ¿Para qué valores de $a$ es diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ?

*Solución*:

$$A - \lambda \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix},$$

Por lo tanto,

$$|A - \lambda I| = (2-\lambda)(a-\lambda)(3-\lambda)$$

**a)** Si $a = 2$, se tiene que: $|A - \lambda \mathrm{I}| = (2-\lambda)^2(3-\lambda)$ y en este caso los autovalores o valores propios de la matriz A son: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$.

Hallemos los autovectores en este caso:

Para $\lambda = 2$ sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, tal que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha \in \mathrm{R},$$

En consecuencia un vector propio asociado al autovalor $\lambda = 2$ de la matriz A es el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Como la multiplicidad algebraica (2) del autovalor 2 es diferente a su multiplicidad geométrica (1), la matriz no es diagonalizable para $a = 2$.

**b)** Si $a = 3$, se tiene que: $|\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}| = (2-\lambda)(3-\lambda)^2$ y en este caso los autovalores o valores propios de la matriz A son: $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 2$.

Para $\lambda = 3$ sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, tal que

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathrm{R},$$

En consecuencia dos vectores propios asociados al autovalor $\lambda = 3$ de la matriz A son:

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda = 2$ sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, tal que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha \in \mathrm{R},$$

En consecuencia un vector propio asociado al autovalor $\lambda = 2$ de la matriz A es el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Como la multiplicidad algebraica de cada autovalor es igual a su multiplicidad geométrica la matriz A es diagonalizable para $a = 3$.

**c)** Si $a \neq 2$ y $a \neq 3$, se tiene que: $|A - \lambda \mathrm{I}| = (2-\lambda)(a-\lambda)(3-\lambda)$ y en este caso los autovalores o valores propios de la matriz A son: , $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = a$ y $\lambda_3 = 3$. En este caso la matriz A si es diagonalizable. (¿por qué?)

Luego, la matriz A es diagonalizable para todo valor de $a$ excepto para $a = 2$.

**4**. Sea $\lambda$ un valor propio de la matriz A, demuestre que $\lambda - \alpha$ es un valor propio de la matriz $\mathrm{A} - \alpha \mathrm{I}$

*Solución*:

Como $\lambda$ es un valor propio de la matriz A se tiene que $\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}) = 0$.
Luego,

$$\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}) = 0 \Rightarrow \det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I} + \alpha \mathrm{I} - \alpha \mathrm{I}) = 0 \quad \Rightarrow \det((\mathrm{A} - \alpha \mathrm{I}) - (\lambda - \alpha)\mathrm{I}) = 0$$

Por lo tanto, $\lambda - \alpha$ es un valor propio de la matriz $\mathrm{A} - \alpha \mathrm{I}$.

Nota: justifique cada uno de los pasos de la demostración anterior

**5**. Sea $\lambda$ un valor propio de la matriz A, demuestre que $\lambda^2$ es un valor propio de la matriz $\mathrm{A}^2$

*Solución*:

Como $\lambda$ es un valor propio de la matriz A se tiene que $\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}) = 0$, además $\mathrm{A}^2 - \lambda^2 \mathrm{I} = (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I})(\mathrm{A} + \lambda \mathrm{I})$.

Luego,

$$\det\left(A^2-\lambda^2 I\right)=\det\left((A-\lambda I)(A+\lambda I)\right)=\det(A-\lambda I)\det(A+\lambda I)=0$$

Por lo tanto, $\lambda^2$ es un valor propio de la matriz $A^2$.

Nota: justifique cada uno de los pasos de la demostración anterior

**6.** Demuestre que si la matriz A es semejante a la matriz B entonces $A^2$ es semejante a $B^2$.

*Solución*:

Como A es semejante a B existe una matriz C invertible tal que $C^{-1}AC=B$, y

$$C^{-1}AC=B \Rightarrow \left(C^{-1}AC\right)\left(C^{-1}AC\right)=BB \Rightarrow \quad C^{-1}A^2C=B^2$$

Por lo tanto, $A^2$ es semejante a $B^2$.

Nota: justifique cada uno de los pasos de la demostración anterior

**7.** Demuestre que si A es diagonalizable entonces $A^2$ es diagonalizable.

*Solución*:

Como A es diagonalizable existe una matriz diagonal D y una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP=D$.

Entonces,

$$P^{-1}AP=D \Rightarrow \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)=D^2 \Rightarrow P^{-1}A^2P=D^2$$

Como $D^2$ es una matriz diagonal, $A^2$ es diagonalizable.

Nota: justifique cada uno de los pasos de la demostración anterior

**8.** Demuestre que si A es diagonalizable entonces $A^t$ es diagonalizable.

*Solución*

Como A es diagonalizable existe una matriz diagonal D y una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP=D$. Veamos si $A^t$ es diagonalizable.

$$P^{-1}AP=D \Rightarrow \left(P^{-1}AP\right)^t=D^t \Rightarrow P^tA^t\left(P^{-1}\right)^t=D^t \Rightarrow \left(\left(P^{-1}\right)^{-1}\right)^t A^t\left(P^{-1}\right)^t=D^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left(P^{-1}\right)^t\right)^{-1} A^t\left(P^{-1}\right)^t=D^t$$

Como $D^t$ es una matriz diagonal $A^t$ es diagonalizable.

Nota: justifique cada uno de los pasos de la demostración anterior

**9.** ¿Cuáles de las matrices del ejercicio 1) son diagonalizables ortogonalmente?

*Solución*:

Las c) y f) (¿por qué?)

**10**. Encuentre la matriz ortogonal Q que diagonaliza la matriz del problema 1c).

*Solución*:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ tenemos que los espacios propios asociados a los autovalores son:

$$E_2 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{y} \quad E_{-1} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Hallemos una base ortonormal para cada uno de los espacios propios.

Sea $B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ una base de $E_2$, dado que la base tiene un solo vector solo se requiere normalizarlo.

Sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces $|\vec{v}| = \sqrt{3}$

Luego,

$$B'_2 = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

es una base ortonormal para $E_2$.

Sea $B_{-1} = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ una base para $E_{-1}$, apliquemos Gram Schmidt para hallar una base $B'_{-1} = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$ ortonormal para $E_{-1}$.

Sea $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $|\vec{v_1}| = \sqrt{2}$. Luego, $\vec{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sea $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, luego, aplicando la fórmula $\vec{u_2}' = \vec{v_2} - (\vec{v_2} \cdot \vec{u_1})\vec{u_1}$, se tiene que

$$\overrightarrow{u_2}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

de donde $\left|\overrightarrow{u_2'}\right| = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ y en consecuencia $\overrightarrow{u_2} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Luego,

$$\mathrm{B}'_{-1} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base ortonormal para $\mathrm{E}_{-1}$

Por lo tanto, la matriz

$$Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal que diagonaliza a la matriz A.

Verifique que

$$Q^t A Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$